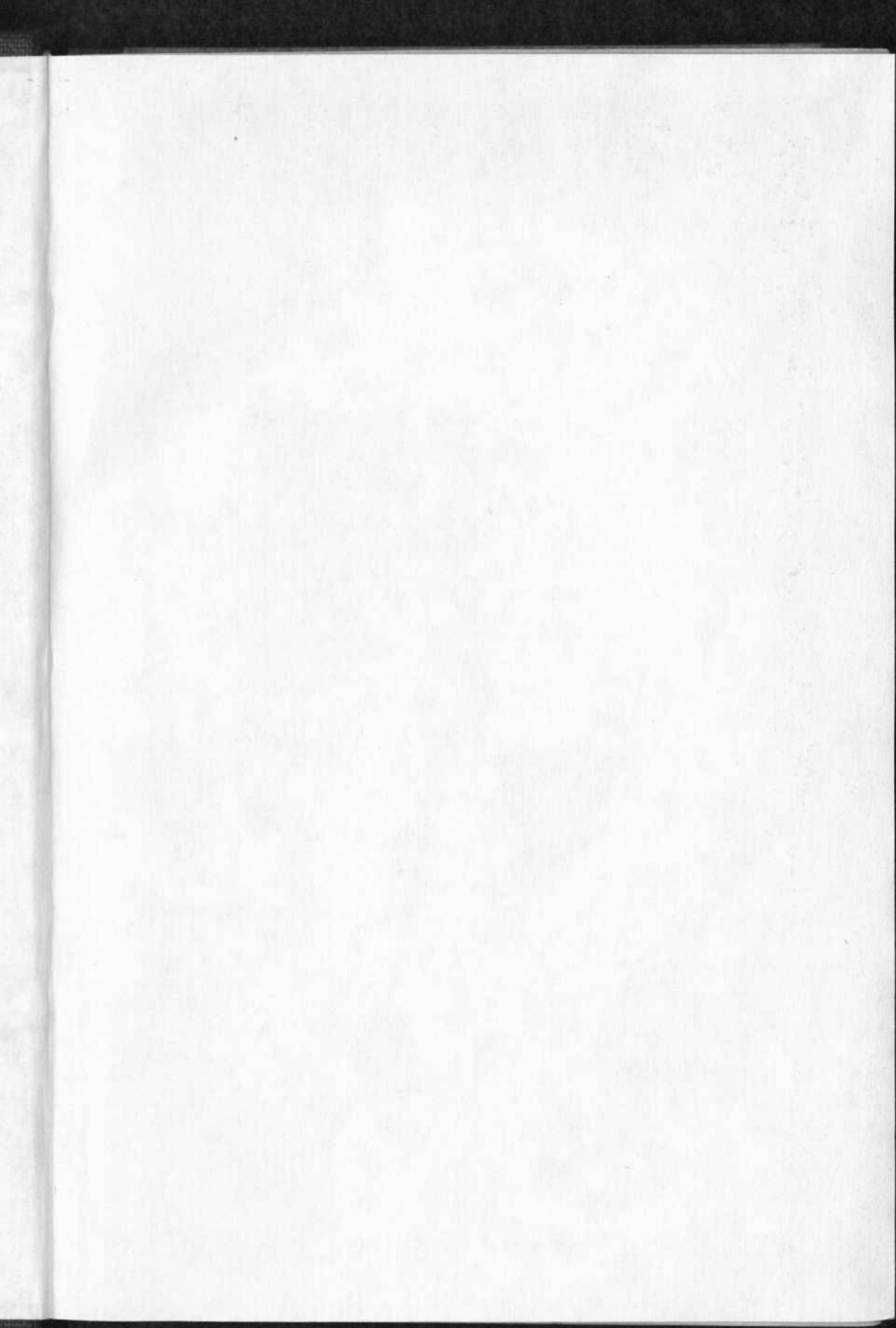

Persistenter Identifier:	330053183
Titel:	Technische Mechanik
Autor:	Leibbrand, Max Rohden, J. v. Neuffer, E. Vetter, L. John Hoffacker Gaedertz, A.N. Mohr, Otto
Ort:	Stuttgart
Maße:	VIII, 308 Seiten
Datierung:	1877
Signatur:	1H 9
Strukturtyp:	monograph
Lizenz:	https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/
PURL:	https://digibus.ub.uni-stuttgart.de/viewer/image/330053183/1/

N.
ANIK

72



149



THE UNIVERSITY OF CHICAGO

LIBRARY

1954

1954

TECHNISCHE MECHANIK.

Bearbeitet und herausgegeben
vom

Ingenieur-Verein

am Polytechnikum zu Stuttgart.

Selbstverlag des Ingenieur-Vereins.

1877.



1947.854.

Nachdem schon während der Jahre 1870 bis 1873 vielfach von den Zuhörern des hochverehrten H. Prof. Baurath Mohr der Wunsch geäußert worden war, dessen Vorlesungen über „Technische Mechanik“ am Kgl. Polytechnikum zu Stuttgart, sowie die in mehreren Aufsätzen in einigen Fachzeitschriften von demselben niedergelegten Untersuchungen über einzelne Capitel dieser Wissenschaft in Form eines vollständigen Lehrbuchs aus der Feder ihres hochgeschätzten Lehrers in die Hand zu bekommen, wurde dieser Wunsch zum Bedürfnis, als ein ehrenvoller Ruf an das Kgl. Polytechnikum zu Dresden den Lehrer von den Hörern trennte, ehe ein grosser Theil derselben Zeit gehabt hatte, den Vorlesungen in ganzem Umfang anzuwohnen zu können.

Auf mehrere Anfragen in dieser Hinsicht stellte H. Prof. Baurath Mohr ein solches Werk in Aussicht, allein eine vielseitige und angestrenzte Thätigkeit liess

die Absicht nicht zur Verwirklichung gedeihen.

Der Ingenieur-Verein am Kgl. Polytechnikum zu Stuttgart beschloß nun, ein an die Vorlesungen von H. Baur. Mohr sich anschließendes Manuscript der Technischen Mechanik zunächst für seine Mitglieder, im Weiteren aber auch für alle ehemaligen Hörer desselben zu bearbeiten und im eigenen Verlag herauszugeben.

Dieses Manuscript sollte zugleich eine Ergänzung der vom Vereine zur Herausgabe bearbeiteten graphischen Constructionsblätter bilden.

Auf eine Anfrage an H. Prof. Baurath Mohr in dieser Angelegenheit erhielt der Verein in zuvorkommendster Weise dessen Zustimmung.

Im Winter 1874 wurde mit der Arbeit begonnen, indem die verschiedenen Kapitel von einzelnen Mitgliedern zur Bearbeitung übernommen waren; allein schon beim I. Kap. zeigte sich, daß eine einheitliche Behandlung der Sache notwendig sei; diese wurde von da ab vom Vereine dem Unterzeichneten übertragen, welcher auch die Verantwortung für die Vollendung des Werkes übernahm.

Zugleich fühlte man das Bedürfnis, auch die von andern Seiten gewonnenen Resultate auf dem Gebiete der Technischen Mechanik hereinzuziehen, und so wurde aus dem Manuscript ein „Compendium“ der Technischen Mechanik.

Trotz mehrfacher Schwierigkeiten in Folge des Zurücktretens vieler Mitarbeiter, welche, größten-

theils in die practische Thätigkeit übergegangen, keine Zeit mehr zu theoretischen Arbeiten fanden, gelang es im Lauf von zwei Jahren das Werk zu Ende zu führen.

Bei der Bearbeitung der einzelnen Kapitel waren neben andern besonders thätig die Mitglieder:

für Kap. I. J. v. Rohden

" " III. E. Neuffer

" " V. L. Vetter

" " VI. J. v. Rohden; ferner John u. Hoffacker;

während Kap. II, IV und VIII. sowie ein Theil von Kap. I. vom Unterzeichneten bearbeitet wurden.

Bei der Redaction der einzelnen Kapitel war die Unterstützung des Mitglieds M. Fischer von ganz besonderem Werthe, da dessen sorgfältige Correctionen und Revisionen manchen Fehler und manche Härten entfernten.

Besonders verdient machte sich ferner das Mitglied A. N. Gaedertz durch die äußerst fleissige Anfertigung des autographischen Textes.

Wenngleich der Verein von aussen keinerlei Unterstützung fand, so ermutigte ihn der rasche Verkauf der einzelnen Kapitel auch in weiteren Kreisen schon während der Bearbeitung und vor allem die günstige Beurtheilung und mehrfache Aufmunterung seines Unternehmens von Seiten des hochgeschätzten H. Prof. Baurath Mohr, welchem wir auch an dieser Stelle unsern tiefsten Dank aussprechen möchten, bei der Arbeit auszuharren

IV.

und die einmal begonnene Sache zu Ende zu führen.

Möge unsere Arbeit eine billige Beurtheilung finden.

Stuttgart, im Mai. 1877.

Max Leibbrand.

Baumeister.

Inhalt.

I. Kapitel.

Festigkeitslehre.

<u>§.</u>		<u>Seite.</u>
1-2.	<i>Einleitung.</i>	1.
3-10.	<i>Theorie d. Zug- und Druckfestigkeit</i>	2.
	<i>Elasticitätsmodul, Bruchbelastungen</i>	2.
	<i>Verlängerung u. Verkürzung eines Stabs</i>	3.
	<i>Hypothese v. Navier</i>	3.
	<i>Bestimmung d. Trägheitsmomente</i>	5.
	<i>Constr. d. neutralen Achse</i>	10.
	<i>Kern eines Querschnitts</i>	11.
11-23.	<i>Theorie der Biegezugfestigkeit</i>	13.
	<i>Hauptgleichg. (7.)</i>	16.
	<i>Tab. für Trägheits u. Widerstandsmom.</i>	16.
	<i>Holzbalken</i>	19.
	<i>Gewaltete Träger</i>	19.
	<i>Blockträger</i>	21.
	<i>Eisenbetonträger</i>	22.
	<i>Tab. üb. Trägerdimensionen</i>	24.
24-25.	<i>Theorie der Zerknickungsfestigkeit.</i>	26.
26-27.	<i>Theorie der Torsionsfestigkeit.</i>	28.
28-35.	<i>Theorie der Scherfestigkeit.</i>	30.
	<i>Hauptgleichg. (3) und (4) u. unten S. 35.</i>	
	<i>Vordübelte Balken</i>	37.
36.	<i>Vernietungen.</i>	38.

II. Kapitel.

Berechnung d. Fachwerke

bei gleichm. vertheilter mobiler Belastung.

1-5.	<i>Allgemeine Entwicklung.</i>	45.
	<i>Belastg. u. Biegemom. von Fachwerken</i>	55.

§.		Seite.
6-8.	Berechnung v. bestimmten Fachwerken.	60.
	I. mit Parallelgurtungen	62.
	Parabelträger	71.
	Schwedler'scher Träger	74.
	Fischbauchträger	77.
	Pauli'scher Träger	77.
	Boßenfachwerke m. 3 Charnieren	80.
	Fachw. Hängebrücken.	91.
9.	Vergleichung von Fachwerksträgern	95.
10.	Berechnung von Fachwerks Pfeilern.	97.

III. Kapitel.

I. Theorie des Erddrucks.

1-13.	Neuere Theorie, graphisch von Mohr	104.
	Tab. für Reibungswinkel	105.
	Construction der Druckrichtung	110.
	Grenzzustände	111.
	Angriffspunct des Erddrucks auf be- grenzte ebene Flächen.	114.
	Anwendbarkeit der Theorie	115.
	Erddruck gegen ebene Stützwände	117.
	Berücksichtigung der Cohäsion.	120.
14-18.	Ältere Theorie	122.
	Übereinstimmung beider Theorien	125.
	Bestimmung der Cohäsionskraft.	126.
	Angriffspunct des Erddrucks	129.

II. Berechnung von Futtermanern.

19-20.	Genau Methode	130.
21-22.	Annäherungsmethode von Poncelet	132.
23-24.	Graphische Lösung bestimmter Aufgaben.	133.
25.	Futtermanern mit Strebepfeilern.	137.

IV. Kapitel.

Berechnung der symmetr. Tonnen: Gewölbe.

1.	Einleitung.	141.
2-5.	Theoretische Untersuchung	142.
6-16.	Berechnung der Gewölbe	147.

a. Graphische Methode

Constructn. der Drucklinie	149.
Druck auf radiale Fugen	153.
Günst. Drucklinie; zweckmäß. Gew. Form.	157.
Einfluß v. Überschüttg u. Hintermauerg.	160.
Schiefe Belastung.	162.

b. Analytische Methode

Hauptgleichungen	162.
Construct. der Drucklinie	163.
Form d. Belastungslinie	168.
17. Berechnung der Ortpfeiler.	171.
18. Berechnung der Zwischenpfeiler.	175.
19. Berechnung der Lehrsgerüste	175.
20. Formeln und Tabellen.	177.

V. Kapitel.Das Seilpolygon mit Einwirkung auf einfache Träger.

1-3. Seilpolygon beliebiger Kräfte in ein. Ebene	184.
4-7. " " verticalen " " " "	187.
Bestimmg d. Auflagerdrücke eines einf. Tr.	189.
Seilcurve.	190.
8-11. Biegemomente u. abscheernde Verticalkräfte	193.
12-14. Grenzwerte derselben beim einfachen Träg.	198.
15-17. Berechng. von einf. Trägern m. unglehm. mob. Bel.	200.
Blechträger (I. Kap.)	21.
Fachwerks träger	210.

VI. Kapitel.I. Theorie der elast. Linie.

1. Einleitung.	220.
2-3. Gleichung u. Entstehung der elast. Linie	221.
4-6. Formveränderg v. Trägern m. const. Querschn.	223.
7. " " " " variabl. " "	229.
8-10. Bestimmung der unbekannten Auflsenkräfte und Biegemomente eingespannter Träg.	229.

§.	Seite.
6-8	5.
II. Berechnung continuir. Träger.	
11-13.	Einleitung. 237.
14-17.	Analytische Berechnung 240.
	Clapeyron'sche Gleichung. 241.
18-25.	Graphische Berechnung. 249.
	Gang der Berechnung 262.
26.	Bestimmung der Auflagerdrücke 267.
27.	Beispiel. 268.
28-30.	Anhang: Allgemeines über continrl. Trgr. 273.

VII. Kapitel.

Berechnung des elastischen Ebo- centrängers.

<u>I. Analytische Entwicklung.</u>	
1-2.	Allgemeines 282.
3-4.	Horizontaldruck, erzeugt durch eine Einzel- last. 284.
5-6.	Horizontaldruck bei gleichm. verth. Belastg. 288.
7-8.	Ungünstigste Lage der mobilen Last 290.
9-10.	Spannungen eines Querschnitts 292.
11.	Einfluß der Temperaturänderungen. 293.
<u>II. Graphische Berechnung.</u>	
12-13.	Allgemeines. 294.
14-15.	Construction der Sehnenvollg. u. Verkürzg. 296.
16-17.	Construction der Auflagerreactionen. 301.
18.	Construction der Drucklinie für eine Einzel- last. 304.
19-20.	Zusammenfassung der Operationen. 305.

TECHN. MECHANIK.

I. Kapitel.

FESTIGKEITS-LEHRE.

Herausgegeben
vom Ingenieur-Verein.
Polytechnikum Stuttgart.

1875.

Handwritten notes at the top of the page, including the date "Monday, November 11, 1919" and several lines of text that are mostly illegible due to fading.

TECHN. MECHANIK

Teil II

4. Kapitel

Elastizität

FESTIGKEITSGESETZE

1. Die Festigkeit ist die Fähigkeit eines Materials, einer äußeren Belastung zu widerstehen, ohne zu versagen.

1.1 Zugversuch

Der Zugversuch ist die einfachste Methode, um die Festigkeit eines Materials zu bestimmen. Dabei wird eine Probe aus dem Material in einer Zugschraube gezogen, bis sie bricht.

Die Zugversuchsmaschine besteht aus einem festen Rahmen, in dem die Probe eingespannt ist, und einem Zugschraube, die die Probe zieht.

1.2 Druckversuch

Der Druckversuch ist die einfachste Methode, um die Festigkeit eines Materials zu bestimmen.

Bei diesem Versuch wird eine Probe aus dem Material in einer Zugschraube gezogen, bis sie bricht.

Die Zugversuchsmaschine besteht aus einem festen Rahmen, in dem die Probe eingespannt ist, und einem Zugschraube, die die Probe zieht.

Lehre

von der

Festigkeit und Elastizität der Baumaterialien.

§. 1. Bezeichnungen.

P eine Kraft von bestimmter Richtung, Größe und Lage.

S die derselben entsprechende $\frac{\text{Zug}}{\text{Druck}}$ Spannung
pro $\text{Q}^{\text{cm.}}$

E Elastizitätsmodul des Materials.

F Querschnitt des Stabes.

Q_x Trägheitsmoment in Bezug auf die *X* Achse

Q^w in Bez. auf die Schwerpunktsachse;

I_x Trägheitsradius in Bez. auf d. *X* Achse;

I^w in Bez. auf d. Schwerpunktsachse.

M stat. Moment in Bez. auf d. Neutralachse.

NA neutrale Achse.

SA Schwerpunktsachse.

§. 2. Einleitung.

Wirkt auf einen Stab, d.h. einen Körper von variablem Querschnitt mit gerader Schwerpunktsachse eine Kraft P von beliebiger Größe, Richtung und Lage, so kann man sich dieselbe in ihrem Angriffspunkt zerlegt denken in

eine Kraft diese beansprucht den Stab auf:

- | | | | |
|-----|-----------------------------|---|---|
| 1.) | \parallel d. Längsrichtg. | $\left\{ \begin{array}{l} \text{Zug} \\ \text{Druck} \end{array} \right\}$ | $\left. \begin{array}{l} \text{Festigkeit.} \\ \text{Zerknickungsfestigkeit; bei langen} \\ \text{gedrückten Stäben.} \end{array} \right\}$ |
| | | | |
| 2.) | \perp d. Längsrichtg. | $\left\{ \begin{array}{l} \text{Scheerfestigkeit; wenn } P \text{ nicht in} \\ \text{SA angreift.} \\ \text{Biegunsfestigkeit; wenn } P \text{ die SA} \\ \text{schneidet} \\ \text{Torsionsfestigkeit; wenn } P \text{ um SA} \\ \text{ein Moment bildet.} \end{array} \right\}$ | |
| | | | |
| | | | |

I.

Theorie der Zug- u. Druckfestgkt.

§. 3. Tabelle d. absoluten Festigkeit.

Kg. pro \square^{cm} .

Material	E	Bel. $\frac{1}{2}$ Elast. Grenze		Bruchbe- lastung		$\frac{2}{3}$ $\frac{1}{2}$ Elast. Grenze	
		Zug	Druck	Zug	Druck	Zug	Druck
Schmiedeseisen	2000 000	1500	1500	3500	3500	$\frac{1}{1300}$	$\frac{1}{1300}$
Gusseisen	1000 000	700	1000	1500	8000	$\frac{1}{400}$	$\frac{1}{500}$
Holz	100 000	200	200	800	500	$\frac{1}{600}$	$\frac{1}{600}$

§. 4. P wirkt in der Richtung d. Schwer-
punctsachse. Man nimmt an, dass sich die Spannung
gleichförmig über den Querschnitt vertheilt, so dass

$$(1.) \quad P = F \cdot \sigma$$

wo P die GröÙe der Kraft, σ die Spannung p. □ Einh. bedeutet.

Die Verlängerung λ des Stabes durch P ist er-
Verkürzung
fahrungsgemäÙ innerhalb gewisser Grenzen, welche bei
Constructions nicht überschritten werden (den sogen.
Elastizitätsgrenzen), der $\frac{\text{Zug}}{\text{Druck}}$ Kraft P proportional.

Ist die ursprüngliche Länge l und die p. □ Einh.
herrshende Spannung σ , so ist

$$(2.) \quad \lambda = l \cdot \sigma \cdot \frac{1}{E}$$

Der Coeffi-
zient E heißt Elastizitätsmodul und ist abhängig
vom Material; innerhalb der Elastizitätsgrenzen ist
derselbe constant und gleich groß für Zug u. Druck.

§. 5. P wirkt auÙerhalb und parallel
der SA. Nach den allgem. Gleichgewichtsbedin-
gungen tritt auf:

1. ein Moment (Kräftepaar), das den Stab zu zerbre-
chen sucht.

2. eine Kraft, welche die Stabtheile gegen einander
zu verschieben sucht (Scheerkraft).

Letztere Kraft bleibt vorerst unberücksichtigt.

Nach Navier's Hypothese erfolgt die
Spannungsvertheilung so, dass alle Elemente eines Stabes,

welche vor Einwirkung der Kraft in einer Querschnittsebene lagen, auch während der Einwirkung der Kraft ineinersolchen liegen.

Der Schnitt beider Querschnittsebenen wird Neutrale Achse genannt und ist in dieser nach (2.)

$$\Delta = 0 = l \cdot \sigma \cdot \frac{1}{E}, \text{ also } \sigma = 0.$$

Gleichgewichtsbedingungen.

1. Kraft = Widerstand.

Wenn σ' die Spannung in d. Entfernung x v. d. N.A.

und $\sigma \dots \dots \dots x \dots \dots$

so ist (3.) $\sigma = \sigma' x$

somit die Spannungskraft des Flächenelementes dF

$$dR = \sigma' x dF.$$

folglich der Widerstand des ganzen Querschnitts

$$(4) R = \sigma' \int x dF = \sigma' a F = P, \text{ wo } a \text{ die}$$

Zahl der Längeneinheiten des Abstandes des S von N.A.

2. Momente von Kraft und Widerstand in Bez. auf die N.A. gleich (Y-Achse).

$$(5) P \cdot c = \sigma' \int x^2 dF = \sigma' Q_{NA} = \sigma' F r^2$$

Es folgt nach (4.), wenn $\frac{c}{a}$ Abstand d. Angriffsp. v. d. N.A. Schwerp.

$$(6) c = \frac{r^2}{a}$$

ferner nach (3.) und (4.), wenn σ^0 die Spannung in der Schwerpunktsfaser

$$(7) \sigma^0 = \frac{P}{F}$$

d. h. die Spannung der Schwerpunktsfaser ist unab. hängig von der Lage des Angriffspunctes.

3. Momente von Kraft u. Widerstand in Bez. auf X Achse, welche $\perp NA$ ist und durch den Angriffspunkt geht.

$$\begin{aligned} \sigma &= P \cdot r - \int dF \cdot r' \cdot xy & \text{oder} \\ (8.) \quad 0 &= \int x \cdot y \cdot dF \end{aligned}$$

Construction d. neutralen Achse.

§. 6. Die Aufgabe gliedert sich folgendermaßen:

a.) Bestimmung von θ oder r des Querschnitts in Bezug auf eine bestimmte (Schwerpunkts-Haupt-) Achse.

b.) Ermittlung einer Beziehung zwischen θ oder r für eine bestimmte (Schwerpunkts-Haupt-) Achse und dem Abstände C des Angriffspunkts der Kraft von NA nach Gleich (6)

c.) Feststellung der Lage von NA .

§. 7. Bestimmung d. Trägheitsmomente.

a.) Dieselbe geschieht

1.) analytisch.

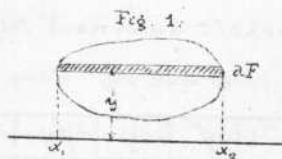
wenn $y = f(x)$ gegeben ist

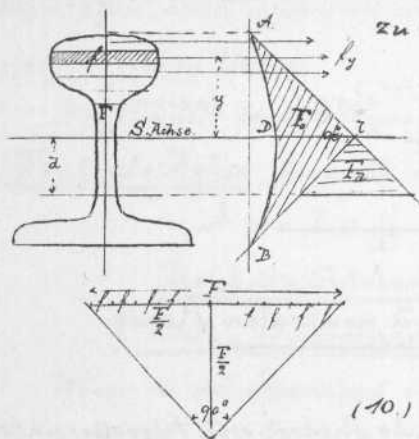
nach d. Gleichungen:

$$(9) \quad dF = (x_2 - x_1) dy, \text{ also}$$

$$(9a) \quad \theta_x = \int y^2 (x_2 - x_1) dy = \int y^2 dF = Fr_x^2$$

Diese Methode ist nur für einfache Profile ohne Schwierigkeit anwendbar.



2.) graphisch.

Man zerlegt die Fläche // der zu Grund gelegten Achse in eine genügende Anzahl Streifen f, f, f, \dots u. konstruiert mit dem Horizontalzug $\frac{F}{2} = H$ u. symmetrisch gelegtem Pol ein Seilpolygon, so ist

$$(10.) \quad F_0 = r_0^2$$

wo r_0 Trägheitsradius d. Fläche

in Bez. auf d. Schwerpunktsachse // d. Theilstreifen, so daß

$$O = F \cdot F_0, \quad \text{ferner ist in Bez. auf}$$

eine // Achse im Abstand d von d. Schwerpunktsachse, da

$$F_d = d^2$$

$$(11.) \quad O_d = F(F_0 + F_d)$$

Anm. Die Berechnung der Fläche F_0 geschieht, indem man von $\triangle ABC$ die Fläche ADB als Parabel subtrahiert oder die Figur $ADBC$ in ein Dreieck verwandelt.

3.) durch Annäherungsrechnung.

Man theilt wieder // der Achse in schmale Streifen (Fig 2.) und erhält dann nach folg. Tabelle

$$O = \sum f y^2 \quad ; \quad r^2 = \frac{O}{F}$$

	f	y	$f y$	$f y^2$
1				
2				
3				
.				
n				
	$F = \sum f$		$\sum f y$	$O = \sum f y^2$

Anm. Die Trägheitsmomente in Bez. auf die Schwerpunktsachse für d. üblichsten Querschnitts

formen sind auf Ste 18. zusammen gestellt.

β.) Berechnung der Θ_a aus dem bekannten Trägheitsmoment einer oder zweier anderer Achsen.

1.) Das Θ_a einer ebenen Figur in Bez. auf eine zur Ebene senkrechte Achse a ist = der Summe d. Trägheitsmomente in Bez. auf 2 in der Ebene liegende, aufeinander \perp durch O gehende Achsen x u. y

$$(12.) \quad \Theta_a = \Theta_x + \Theta_y$$

2.) Θ_x in Bez. auf eine bel. in der Ebene liegende Achse (X) ist gleich dem Θ_o in Bez. auf die \parallel Schwerpunktsachse + Fläche \times Quadrat des Abstands d beider Achsen, also:

$$(13.) \quad \Theta_x = \Theta_o + Fd^2$$

3.) Sind die Trägheitsmomente $\Theta_x = Fr_x^2$
einer Fläche $\Theta_y = Fr_y^2$

in Bez. auf d. \perp stehenden Achsen OX u. OY gegeben, so ist in Bez. auf eine durch O gehende M Achse, die mit OX den Winkel α einschließt.

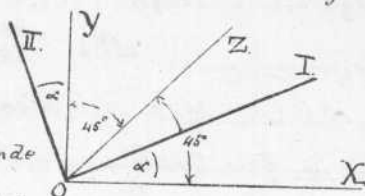


Fig. 3.

$$(14.) \quad \Theta_M = \Theta_x \cos^2 \alpha + \Theta_y \sin^2 \alpha - \sin 2\alpha \int xy dF$$

demnach wird Θ_M ein \max \min für $\frac{\partial \Theta_M}{\partial \alpha} = 0$, d. h. für

$$(15.) \quad \tan 2\alpha = \frac{2 \int xy dF}{\Theta_y - \Theta_x}$$

Die hierdurch bestimmten aufeinander senkrechten Achsen, für welche Θ_1 und Θ_2 die Trägheitsmom. sind, nennt man Hauptachsen des Punktes O , so daß die

Achse des maximal Trägheitsmoments Θ_1 die erste Hauptachse.
Achse des minimal Trägheitsmoments Θ_2 die zweite Hauptachse.

Anm. Mit $\alpha = 45^\circ$ bestimmt sich:

$$\begin{aligned} \tan^2 \alpha &= \frac{\Theta_x + \Theta_y - \Theta_z}{\Theta_y - \Theta_x} = \frac{r_x^2 + r_y^2 - r_z^2}{r_y^2 - r_x^2} \\ &= \frac{h^2}{l^2} = \frac{h}{l} \end{aligned}$$



Die Koordinatenachsen OX u. OY wer-

den nach (15) Hauptachsen, wenn

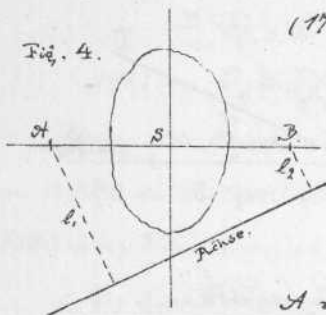
$$(15.) \quad 0 = \int xy \, dF$$

Auf diese bezogen erhält man das Θ_m für eine durch O gehende, zu Achse nach 2. Gleichg:

$$(16.) \quad \Theta_m = \Theta_x \cos^2 \alpha + \Theta_y \sin^2 \alpha$$

4.) Sind die Trägheitsmomente Θ_x^* und Θ_y^* in Bez. auf die Schwerpunktsachsen gegeben, so erhält man das Θ für eine nicht durch S gehende Achse wie folgt: Trage

Fig. 4.



$$(17.) \quad \frac{AS}{BS} = \pm \sqrt{\frac{r_x^{*2} - r_y^{*2}}{r_y^{*2} - r_x^{*2}}} \quad \text{auf der er-} \\ \text{sten Hauptachse ab, so ist}$$

$$\Theta = F(r_x^{*2} + l_1 l_2) \quad \text{oder}$$

$$(18.) \quad r^2 = r_x^{*2} + l_1 l_2$$

wo $l_1 \times l_2$ positiv negativ je nachdem

A u. B auf gleicher Seite von der

O Achse liegen.

A u. B werden Trägheitsmittelpunkte für d. Hauptachse genannt.

§. 8. Beziehung zw. d. Schwerpunktschwer-

achsen und der Lage der NA.

1.) Aus der Übereinstimmung von Gleichg 9 und 9a folgt, dass NA und die durch C gehende \perp Achse

einer auf C_3B Senkrechten CC , bewegt. Hieraus folgt:

§. 9. Construction der N.A.

1.) allgemeiner Fall. Man ermittelt

1. d. Schwerpunkt S nach d. Gleichg: $a = \frac{\sum m x}{\sum m}$ (durch Seilpolygon oder Rechnung).

2. das Trägheitsmoment für 2 \perp Schwerpunktsachsen.

3. die Hauptachsen nach Gl. (15)

4. die Trägheitsmittelpunkte A und B nach Gl. 17.

5. die dem " " zugehör. N.A. aa , bb , nach

Gleichg (6.) $C = \frac{r^2}{a}$ (Construction Ste 9.).

6. Ziehe AC und $AD \perp AC$ wo D auf aa ,
 BC und $BE \perp BC$ " E " bb , gelegen, so ist

DE die N.A. zu C (Fig. 7.)

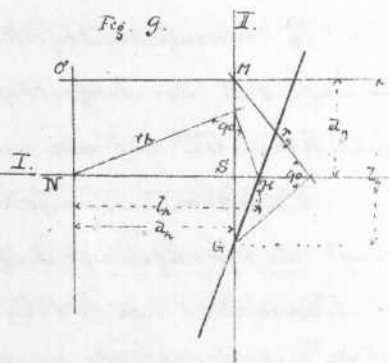
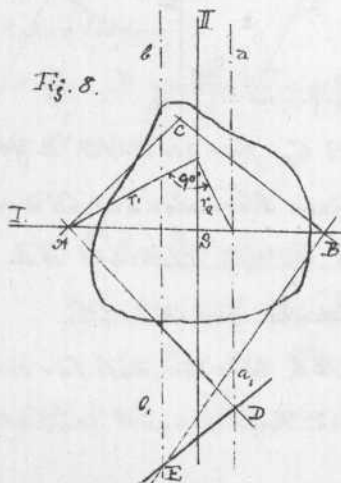
Zusatz. (Fig. 8.) Fallen die Punkte D u. E außer.

halb des Zeichnungsblattes, so bestimmt man zu den beiden durch den gegob. Spannungsmittelpunkt C u. den beiden Schwerpunkten, hauptachsen gezogenen Geraden CM und CN als N.A. die bei den Spannungsmittelpunkten G u. H nach Gl. (13.) und (6.)

$$r_g^2 = r_c^2 + d_g^2 \quad \text{und} \quad l_g = \frac{r_g^2}{d_g}$$

$$r_h^2 = r_c^2 + d_h^2 \quad \text{und} \quad l_h = \frac{r_h^2}{d_h} \quad \text{so geht die gesuchte}$$

als N.A. durch G und H .

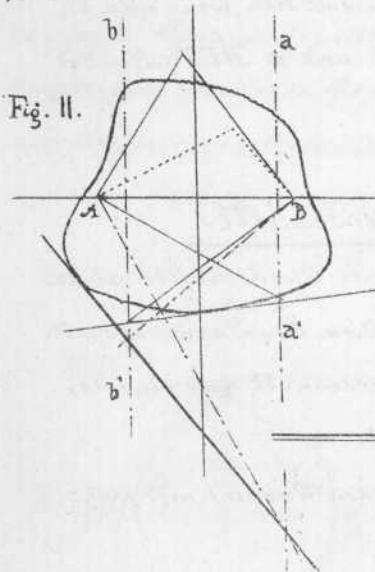


Hilfssatz. Nach S. 9, 2. Liegen die Angriffspunkte der NA , welche durch einen Punkt gehen, auf einer Geraden.

Bestimmung d. Kernes.

1. Man ermittle den Schwerpunkt (mittels der Seilpolygone)
2. die Trägheitsmomente O_x und O_y in Bez. auf 2 durch den Schwerp. gehende Achsen.
3. die Lage der Hauptachsen nach d. Gleichg.

$$\tan 2\alpha = \frac{r_x^2 + r_y^2 - r_z^2}{r_x^2 - r_y^2} = \frac{h_x^2}{h_y^2} = \frac{h_x}{h_y}$$
4. trage d. Trägheitsmittelpunkte A u. B auf
5. deren zugehör. NA aa , und bb , ; so kann man nach folg. Figur für jede charakteristische Lage einer den Querschnitt berührenden NA der zugehör. Angriffspunkt construirt werden.



Verbinde die Schnittpunkte d. NA mit aa , und bb , bzw. mit A und B , wird der Schnittpunkt der Senkrechten auf diese Verbindungslinien in A u. B der gesuchte Angriffspunkt.

II.

Theorie der Biegezugsfestigkeit.§. 11. Definition.

Wirken auf einen Stab Außenkräfte senkrecht zur Schwerpunktsachse in einer durch dieselbe gelegten Ebene, welche unter sich im Gleichgewicht sind, so wird ein Querschnitt des Stabes vermöge des Gleichgewichts des links oder rechts von diesem liegenden Stabtheils in Anspruch genommen durch

1.) eine Scheerkraft V

2.) ein Kräftepaar = dem Biegemoment des Querschnitts, d.h. dem Product aus der Resultirenden der links oder rechts vom Querschnitt wirkenden Außenkraft und deren Entfernung vom Querschnitt.

Durch 2.) wird der Stab auf Biegung beansprucht, durch 1.) auf Abscheerung. Letztere Beanspruchung wird als verhältnissmäßig klein gewöhnlich vernachlässigt.

§. 12. Bezeichnungen.

In folgendem bezeichnet

M das Biegemoment.

σ Spannung per \square Einheit, welche M entspricht.

F Querschnitt

Θ Trägheitsmoment bez. auf die S.A.

NA neutrale Achse.

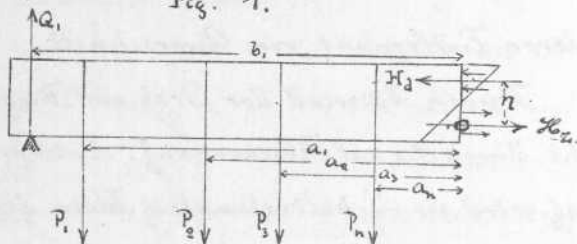
z Abstand der äussersten (am meisten beanspruchten) Faser von der NA (resp. NA .)

$\frac{Q}{z} = w$ Widerstandsmoment.

§. 13. Ableitung der Hauptgleichung.

Ein in zwei Punkten unterstützter Stab sei durch die Kräfte P_1, P_2, \dots, P_n senkrecht zur Schwerpunktsachse angegriffen, so bemerkt man, dass die Faser $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{oberhalb} \\ \text{unterhalb} \end{smallmatrix} \right\}$ der Schwerpunktsfaser eine $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{Verkürzung} \\ \text{Verlängerung} \end{smallmatrix} \right\}$ erleidet, dass also im $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{oberen} \\ \text{unteren} \end{smallmatrix} \right\}$ Theil des Querschnitts $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{Druck} \\ \text{Zug} \end{smallmatrix} \right\}$ auftritt und hat man für die Mittelkräfte H_d und H_z des $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{Drucks} \\ \text{Zugs} \end{smallmatrix} \right\}$ die Gleichgewichtsbedingung:

Fig. 1.



$$(1.) H_d + H_z = 0 \quad \text{oder absolut} \quad H_d = H_z = H, \text{ fer.}$$

$$\text{ner} \quad (2.) P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n - Q_1 + V = 0 \quad \text{oder}$$

$$R = +V$$

$$(3.) P_1 a_1 + P_2 a_2 + \dots + P_n a_n - Q_1 b_1 + H \eta = 0 \quad \text{oder}$$

$$(3a.) P_1 a_1 + P_2 a_2 + \dots + P_n a_n - Q_1 b_1 = M = H \cdot \eta$$

Anmerkung.

Die obigen drei Gleichungen sind richtig, so lange die durch die Aussenkräfte bedingte Durchbiegung des Stabes so klein ist, dass die Aussenkräfte

be, resp. R noch senkrecht und H noch \parallel der Schwerpunktsachse angenommen werden können.

Geschieht die Spannungsverteilung im Querschnitt nach der „Navier'schen Hypothese“, so ist

$$4.) \quad s_y = s'y$$

wo s_y die Span-

nung pro D.Einheit im Ab-
stand y von der NA ; folg-
lich die Spannung dH
des Flächenelements

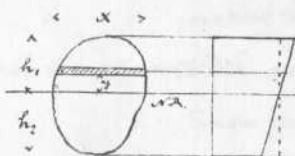


Fig. 2.

$$dF = x \cdot dy$$

$$dH = s'y \cdot x \cdot dy, \text{ also}$$

$$H_2 = s' \int x y dy \quad \text{und}$$

$$H_1 = s' \int x y dy, \text{ also nach}$$

Gleich 1.) $\int x y dy - \int x y dy = 0$

d.h. NA ist identisch mit der Schwer-
punktsachse des Querschnitts.

S. 14.

Da ferner

$$dM = y dH = s' y' x dy, \text{ so ist}$$

$$M = s' \int y' x dy = s' \int y' dF$$

5.) $M = s' \Theta$, wo

6.) $\Theta = \int y' dF = \text{Trägheitsmoment}$

des Querschnitts F , bezogen auf SA .

Die Beanspruchung des Querschnittselements

wächst mit der Entfernung z derselben von der SA und erhält man daher die Maximalbeanspruchung an der Stelle, wo z ein Maximum, also

$$\sigma = \sigma' z \quad \text{oder} \quad \sigma' = \frac{\sigma}{z}$$

also wenn σ die größte zulässige Spannung, bestimmt sich das größte zulässige Biegemoment eines Querschnitts F

$$4.) \quad M = \frac{\sigma}{z} \Theta \quad \text{oder wenn}$$

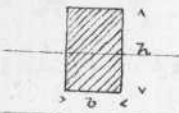
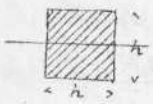
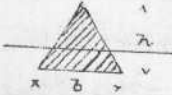
$\frac{\Theta}{z} = w$ als das Widerstandsmoment des Querschnitts bezeichnet wird;

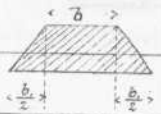

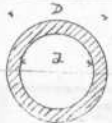

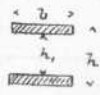

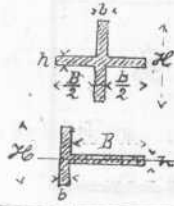
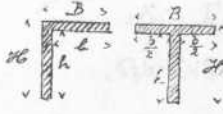
$$4a.) \quad M = \sigma \cdot w$$

S. 15.

Trägheits- und Widerstandsmomente der gebräuchlichsten Querschnittsformen.

(bez. auf die Schwerpunktsachse.)

Form des Querschnitts	$\Theta = Fr^2$	z	$w = \frac{\Theta}{z}$
	$\frac{1}{12} b h^3$	$\frac{h}{2}$	$\frac{1}{6} b h^2$
	$\frac{1}{12} h^4$	$\frac{h}{2}$	$\frac{1}{6} h^3$
	$\frac{1}{36} b h^3$	$\frac{2}{3} h$	$\frac{1}{24} b h^2$

F	Θ	Z	w
	$\frac{6b^2 + 6bb_1 + b_1^2}{36(2b + b_1)} h^3$	$\frac{3b + 2b_1}{2b + b_1} \cdot \frac{h}{3}$	$\frac{6b^2 + 6bb_1 + b_1^2}{12(2b + b_1)} h^2$
	$\frac{\pi d^4}{64}$	$\frac{d}{2}$	$\frac{\pi d^3}{32} = 0.0982 d^3$
	$\frac{\pi}{64} (D^4 - d^4)$	$\frac{D}{2}$	$\frac{\pi}{32} \cdot \frac{D^4 - d^4}{D}$
	$\frac{\pi b a^3}{4}$	a	$\frac{\pi b a^2}{4} = 0.7854 b a^2$
	$\frac{b(h^3 - h_1^3)}{12}$	$\frac{h}{2}$	$\frac{b(h^3 - h_1^3)}{6h}$
	$\frac{bH^3 - bh^3}{12}$	$\frac{H}{2}$	$\frac{bH^3 - bh^3}{6H}$
	$\frac{bH^3 + Bh^3}{12}$	$\frac{H}{2}$	$\frac{bH^3 + Bh^3}{6H}$
	$\frac{1}{12} \left\{ \frac{(Bh^3 - bh^3)^2}{bH^2 - bh^2} - \frac{4Bbh^2(h - h_1)^2}{Bh^2 - bh^2} \right\}$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{Bh^2 - bh^2}{Bh - bh}$	$\frac{1}{6} \left\{ Bh^2 - bh^2 - \frac{4Bbh^2(h - h_1)^2}{Bh^2 - bh^2} \right\}$

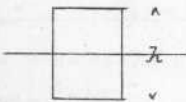
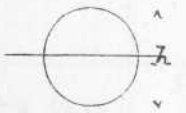
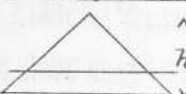


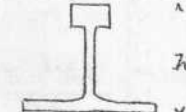
§. 16.

Vergleich d. Widerstandsfähigkeit
folgar. Querschnitte.

Da $O = mh'F$

$z = nh$, so ist.

$w = \frac{O}{z} = \left(\frac{m}{n}\right) hF = ahF$, dann ist a
 der Maßstab für die Widerstandsfähigkeit des
 Querschnitts, wenn F u. h constant ist:

		a .
	$M = F.s.\frac{h}{6}$	$\frac{1}{6}$
	$M = F.s.\frac{h}{8}$	$\frac{1}{8}$
	$M = F.s.\frac{h}{12}$	$\frac{1}{12}$
	$M = F.s.\frac{h}{4}$	$\frac{1}{4}$
	$M = F.s.0,3h$	0,3
	$M = F.s.\frac{4}{33}h$	$\frac{4}{33}$

der widerstds fähigste wäre demnach I, da $\frac{1}{2}h$,
 für welches $a_{\max} = \frac{1}{2}$, nicht ausführbar ist.

Günstigste Querschnittsformen für verschied. Baumaterialien.

§. 17.

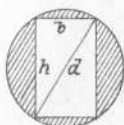
I. Holz.

Aus Rundholz wird der tragfähigste Balken mit rechteckigem Querschnitt geschnitten, wenn in der

Gleichg $M = s \frac{bh^3}{6} = \frac{s}{6} b(d^2 - b^2)$

$$\frac{dM}{db} = \frac{s}{6}(d^2 - 3b^2) = 0 \quad \text{gesetzt wird}$$

also $h^2 = 2b^2$ und



$$\frac{h}{b} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \frac{7}{5} \quad (8.)$$

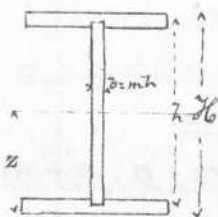
§. 18.

I. Schmiedeeisen

A. Gewalzte Träger.

Aus §. 16 ergibt sich, daß die **I** Form die tragfähigste ist. Die Verhältnisse derselben sind bedingt

1.) durch den Walzproceß, so daß



$$h_{\max} = 400 \text{ mm.}$$

$$b_{\min} = \frac{h}{20}; \quad m_{\min} = \frac{1}{20}$$

2a) für den Fabrikanten durch die Rücksicht darauf, bei gegeb. Querschnittsinhalt F ein Maximal M

zu erzielen. Da nun annähernd

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{mh^3}{12} + (F - mh^2) \frac{h^2}{4} \\ &= \frac{h^2}{4} \left\{ F - \frac{2}{3} mh^2 \right\} \quad \text{und annähernd} \end{aligned}$$

$z = \frac{h}{2}$, so wird

$$M_b = \frac{s \cdot h}{2} \left\{ F - \frac{2}{3} m h^2 \right\} \quad \text{ein Maximum, wenn}$$

$$\frac{dM_b}{dh} = \frac{s}{2} (F - 2 m h^2) = 0 \quad ; \text{daraus folgt:}$$

$$(9.) \quad h = \sqrt{\frac{F}{2m}} \quad ;$$

$$\text{für } m = \frac{1}{20} \quad h = \sqrt{10F}$$

$$\text{die Mittelrippe} \quad m h^2 = \frac{F}{2}$$

$$\text{die Gurtungen } F_1 + F_2 = \frac{F}{2}; \quad F_1 = F_2 = \frac{F}{4}$$

26.) für den Constructeur durch die Rücksicht darauf, zals für ein gegebenes M_b sein Minimum werde.

$$M_b = \frac{s \cdot h}{2} \left\{ F - \frac{2}{3} m h^2 \right\}, \text{ also wird}$$

$$F = \frac{2M_b}{s \cdot h} + \frac{2}{3} m h^2 \quad \text{ein Minimum, wenn}$$

$$\frac{dF}{dh} = -\frac{2M_b}{s h^2} + \frac{4}{3} m h = 0$$

$$h^3 = \frac{3}{2} \frac{M_b}{m \cdot s} \quad \text{und somit}$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{3M_b}{2sm}}$$

Setzt man $s = 7,5 \text{ kg p. D}^{\text{mm}}$ und $m = \frac{1}{20}$, so ist

$$(10.) \quad h^{\text{mm}} = \sqrt[3]{4 M_b^{\text{mmkg}}}, \quad \text{also}$$

$$(11.) \quad F = \frac{1}{10} \sqrt[3]{16 M_b^2} = \underline{\underline{0,25 \sqrt[3]{M_b^2}}}$$

§. 19.

Anordnung mehrerer Träger.

Es sei die Zahl der Träger = n , so kommt auf jeden das Biegemoment $\frac{M_b}{n}$, also nach (11) der Querschnitt eines Trägers:

$$F = 0,25 \sqrt[3]{\frac{M_b^2}{n^2}} \quad \text{und somit sämtliche } n \text{ Träger}$$

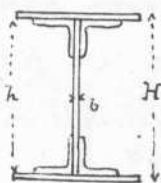
$$nF = 0,25 \sqrt[3]{M_b^2} \sqrt[3]{n}, \quad \text{also um so günstiger.}$$

ger, je weniger Träger.

S. 20

B.) Blechträger.

Verlegt man die Schwerpunkte der Gurtungen in die Endpunkte der Mittelrippe, so erhält man genügend genau:



$$O = \frac{h^2}{4} (F - \frac{2}{3}bh) \quad , \text{ also}$$

$$M = \frac{bh}{2} (F - \frac{2}{3}bh) \quad \text{und hieraus}$$

$$F = \frac{2M}{bh} + \frac{2}{3}bh$$

bei gegebenem M wird F ein Minimum, wenn

$$\frac{dF}{dh} = -\frac{2M}{bh^2} + \frac{2}{3}b = 0$$

$$(12.) \quad h = \sqrt{\frac{3M}{sb}} \quad ; \text{ woraus}$$

$$(13.) \quad F_{\min} = \frac{4}{3}bh = bh + 2F_1$$

wo F_1 der Gurtungsquerschnitt $= \frac{1}{6}bh$.

NB. 1.) muß aus praktischen Gründen $F_1 > \text{an-}$
genommen werden, so bestimmt sich h aus

$$(14.) \quad M = sh(F_1 + \frac{1}{6}bh)$$

2.) Ist der Preis für die Flächeneinheit des Querschnitts für die Blechtafeln $= k$

Winkelleisen $= k_1$, so werden die Gesamtkosten des Querschnitts

$$K = kbh + k_1(\frac{3M}{sh} - \frac{1}{3}bh) \quad \text{am kleinsten}$$

wenn $\frac{dK}{dh} = 0$, d.h., wenn

$$h = \sqrt{\frac{6Mk_1}{s(3k-k_1)b}} \quad \text{woraus}$$

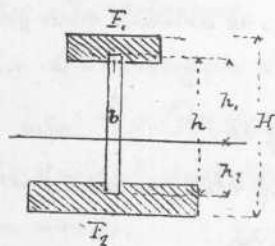
$$M = \frac{h^2 s (3k - k_1) b}{6k_1}$$

$$F = bh(\frac{2}{3} + \frac{3k - k_1}{3k_1})$$

§. 21.

III. Guliseisen.

Die vortheilhafteste Querschnittsform wird erreicht, wenn das Maximum der zuläss. Spannung für Zug u. Druck gleichzeitig eintritt. Ist die entsprechende Lage



des Schwerpunkts bestimmt

durch $\frac{h_1}{h_2} = n$ und ist

$b = mh$, so ist

$$h_2 = \frac{h}{n+1} \text{ und } h_1 = \frac{hn}{n+1}$$

und der Querschnitt der ge-

drückten Gurtung

$$F_1 = \frac{F}{n+1} - \frac{mh^2}{2},$$

der gezogenen

$$F_2 = \frac{Fn}{n+1} - \frac{mh^2}{2}$$

$$O = F_1 h_1^2 + F_2 h_2^2 + \frac{mh}{3} (h_1^3 + h_2^3) \quad , \text{ woraus}$$

$$O = \frac{Fn h^2}{(n+1)^2} - \frac{mh^4}{6}$$

Man hat nun unter der Voraussetzung, dass die Spannung des Schwerpunkts einer Gurtung s = der Spannung der äußersten Schichte derselben die zulässige Druck Zug Spannung in der Formel:

$$M = s \frac{O}{\frac{h}{n+1}} = \frac{Fsh}{n+1} - \frac{s mh^3(n+1)}{6n}$$

Für den Fabrikanten besteht nun die Aufgabe, bei gegeb. F ein M_{\max} zu erhalten,

also die Bedingung $\frac{dM}{dh} = 0$, woraus

$$(15.) \quad h = \sqrt{\frac{2nF}{m(n+1)^2}} \quad , \text{ wobei}$$

$$(16.) \quad F = \frac{m(n+1)^2 h^2}{2n}$$

Für den Constructeur ist gegeben

M und soll F ein Minimum werden, also

$$\frac{dF}{dh} = 0 \quad \text{woraus sich ergibt:}$$

$$(17.) \quad h = \sqrt[3]{\frac{3Mn}{8m(n+1)}} \quad \text{wodurch}$$

$$(18.) \quad F_{\min} = (n+1) \sqrt[3]{\frac{8M^2(n+1)m}{8n^2}}$$

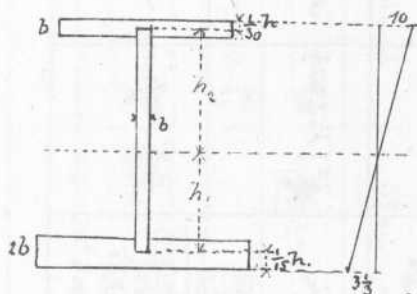
Das Trägheitsmoment dieses günstigsten Querschnitts ist

$$O = Fh^2 \left\{ \frac{2}{3} \frac{n}{(n+1)^2} \right\} \quad \text{und entspre.}$$

chond $M = Fs \left\{ \frac{2}{3} h \frac{1}{n+1} \right\}$

Günstige Querschnittsverhältnisse er.

hält man „wenn man setzt:



$$\text{Stoßdicke} = \frac{1}{15} h.$$

$$\text{Höhe d. gedr. Gurte} = \frac{1}{15} h$$

$$\text{„ d. gez. G.} = \frac{2}{15} h$$

$$\text{zul. Zugspg.} = 3\frac{1}{3}$$

$$\text{zul. Drucksp.} = 10$$

$$\text{so dass } \frac{h_1}{h_2} = \frac{1}{3}.$$

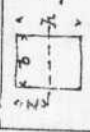
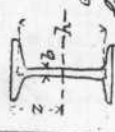
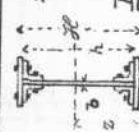
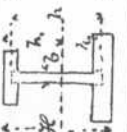
$$h = 1,5 \sqrt[3]{M}.$$

$$F_{\min} = 0,48 \sqrt[3]{M^2} = 0,202 h^2.$$

§. 22.

Zusammenstellung der günstigsten Verhältnisse für Balkenträger.

(siehe Seite 24.).

1	2	3	4	5	6	7	8
	b	Vorteilhafte ster Werth von h .	$F_{min.}$	Θ	M	Z	s kg zulässig pro $\square mm$.
 Holz.	Aus Rundholz geschnitten b	$\frac{7}{8} b$	$\frac{7}{8} b^2$	$\frac{b h^3}{12}$	$0.5 \frac{b h^2}{6}$	$\frac{h}{2}$	0,5
 Schmiedeeisen Gew. 11,15 m $g = 0,77 \frac{F}{cm}$ Gestützter Träger.	$m h$ $\frac{1}{20} h$	$\sqrt{\frac{1}{8m} \frac{F}{b}}$ $\sqrt{\frac{3M}{8.0m}}$ $\sqrt{\frac{4M}{4M}}$	$\sqrt[3]{\frac{18mM}{0.2}}$ $0.25 \sqrt[3]{M^2}$	$\frac{h^3}{4} \{ F - \frac{8}{3} b h \}$	$0. \frac{\Theta}{h^2}$	$\frac{h}{2}$	4,5
 Schmiedeeisen Blechträger.	q^{mm}	$\sqrt{\frac{3M}{8b}}$ $\sqrt{\frac{M}{20}}$	$\frac{4}{3} b h$ $12 h \square^{mm}$	$\frac{h^3}{4} \{ F - \frac{8}{3} b h \}$	$0. \frac{\Theta}{h^2}$	$\frac{h}{2}$	6,5
 Gusseisen Senk $\frac{h_1}{h_2}$ $\frac{m_1}{m_2}$	$m h$	$\sqrt{\frac{2mF}{m(n+1)}}$ $\sqrt{\frac{3M}{4m(n+1)}}$ $1,5 \sqrt[3]{M}$	$\sqrt[3]{\frac{9M^2 m(n+1)}{8n.0.2}}$ $\{ 0,48 \sqrt[3]{M^2} \}$ $\{ = 0,202 h^2 \}$	$\frac{F m h^2}{(n+1)^2} - \frac{m h^4}{6}$	$0. \frac{\Theta}{h^2}$	$\frac{3h}{4}$	10 kg Druck $\{ 3 \frac{1}{2} kg Zug.$

w. 23.

Träger von gleicher Anstrengung.

Bedingung: Die Spannung pro □ Einheit soll für eine gegebene Belastung in allen Querschnitten gleich groß sein, also

$$\sigma = \frac{Mz}{\Theta} = \text{Constante.}$$

Belastungsweise	Querschnitt	Längenschnitt	Formeln z. Berechnung	Näherungsform.
Träger eingespannt; am freien Ende mit P belastet.	Fall 1. 		$y^2 = \frac{6P}{b\sigma} x$ Parabol	
	Fall 2. 		$h = \sqrt{\frac{6PL}{b\sigma}}$	
			$h = \sqrt{\frac{32P}{\sigma\pi}} x$; $h = \sqrt{\frac{32PL}{\sigma\pi}}$	
Träger eingespannt an gleichf. vertheilter Belas- tung. p pro Lf. m.			$y^2 = \frac{3p}{8\sigma} x^2$; $h = \sqrt{\frac{3pL}{8\sigma}}$	genau.
			Ellipso: $h = \sqrt{\frac{3pL}{8\sigma}}$	
Träger auf zwei Stützen mit gleich- förmig vertheilter Be- lastung. p pro Lf. m.	Fall 1. 		$\sigma = \frac{3p}{8\sigma} x^2$; $h = \sqrt{\frac{3pL}{8\sigma}}$	nicht getreulich.
			$F = F_0 \cdot e^{\frac{p}{\sigma}}$ g Gewicht pro Querschnitt	Logarithmische Spinnale

III.

Theorie der Kerknickungsfestigkeit.

§. 24.

In ihrer Längenrichtung gedrückte, im Verhältniß zu ihren Querschnittsdimensionen lange Stäbe erleiden eine seitliche Ausbiegung und tritt in Folge davon der Bruch eher ein.

Die gefährlichste Spannung σ im Abstand z von der N.A. tritt an der Stelle der größten Ausbiegung u auf und setzt sich zusammen aus

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{P}{F} \text{ der Spannung für Pressung allein} \\ \text{und } \sigma_2 &= \frac{M}{I} z = \frac{P u}{F r^2} z \text{ d. Spröge f. Biege allein.} \\ \sigma &= \frac{P}{F} \left\{ 1 + \frac{u}{r^2} z \right\} \quad (1.) \end{aligned}$$

Setzt man annäherungsweise

$$u = \frac{l^2}{8R} \text{ und führt ein}$$

$$R = \frac{E}{\sigma_2} z, \text{ so ist}$$

$$\sigma = \frac{P}{F} \left\{ 1 + \frac{l^2}{r^2} \cdot \frac{\sigma_2}{8E} \right\} \quad (2.)$$

Setzt man die Constante $\frac{\sigma_2}{8E} = n$, so ist

$$P = \frac{F \cdot \sigma}{1 + \frac{l^2}{r^2} n} \quad (3.)$$

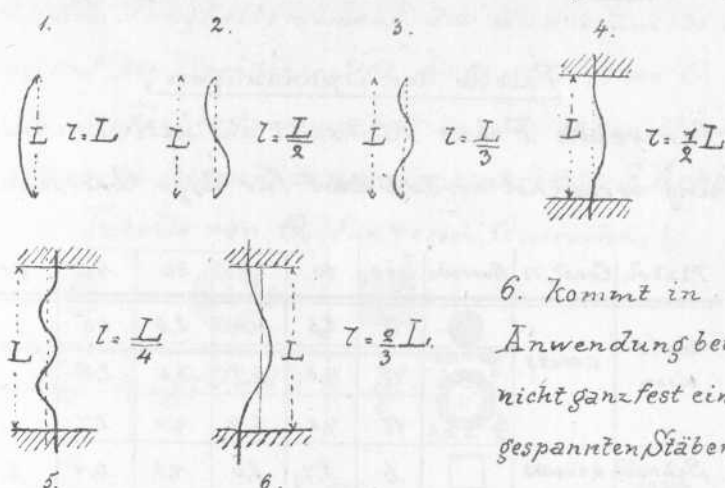
n ist durch Versuche bestimmt:

für Schmiedeeisen	$n = 0,000088$; abgerundet = $0,0001$
für Gussisen	$n = 0,00025$ " = $0,0003$
für Holz	$n = 0,00016$ " = $0,0002$

Freie Länge.

l in (2.) u. (3.) ist immer gleich einer Wellenlänge zu nehmen; also nur in dem Fall 1. eines Stabes mit

frei beweglichen Enden = der Stablänge L .



6. kommt in Anwendung bei nicht ganz fest eingespannten Stäben.

§. 25.

Günstigster Querschnitt.

Derselbe soll möglichst nach allen Richtungen gleichen Widerstand gegen Ausbiegen haben. Man verwende also bei

Guliseisen volle und hohle Säulen:

$$\begin{array}{cc} \text{Vollkreis} & \text{Hohler Kreis} \\ \text{Querschnitt} & \text{Querschnitt} \\ r^2 = \frac{d^2}{16} & r^2 = \frac{d^2 - d_1^2}{16} \end{array} \quad \text{und}$$

$$\frac{P}{F} = \frac{12}{1 + 0,004 \frac{L^2}{d^2}} \quad \text{und}$$

$$\frac{P}{F} = \frac{12}{1 + 0,002 \frac{L^2}{d^2}} \quad \text{wo } \frac{d_1}{d} = 0,8 - 0,9$$

Schmiedeeisen aus Blechtafeln zusammengesetzte Constructionen:

$$\text{Querschnitt} \quad r^2 = \frac{d^2}{6} \quad \text{und} \quad \frac{P}{F} = \frac{6}{1 + 0,0005 \frac{L^2}{d^2}}$$

Holz volle quadratische Prismen



$$r^2 = \frac{d^2}{12} \quad ; \quad \frac{P}{F} = \frac{0,6}{1 + 0,0019 \frac{L^2}{d^2}}$$

Tabelle der Spannungen,

für welche ohne Rücksicht auf seitliche Ausbiegung berechnet werden darf für obige Querschnitte.

Matr. l.	Const. n	Querschn.	$\frac{L}{d} = 0$	10	20	30	40	50
Guss eisen	0,00025		12	8,6	4,6	2,6	1,6	
		$\frac{d_2}{d} = 0,8$	12	9,6	6,1	3,8	2,5	
		$\frac{d_2}{d} = 0,9$	12	9,8	6,4	4,0	2,7	
Schmied eisen	0,000088		6	5,7	5,0	4,2	3,4	2,7
Holz.	0,00018		0,6	0,35	0,34	0,22	0,15	0,1

$\frac{P}{F}$

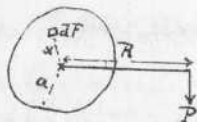
IV.

Theorie der Torsionsfestigkeit.

§. 26.

Wirkt eine Kraft P am Hebelarm R verdrehend auf eine Welle ein, so ist im Falle des Gleichgewichts

der Widerstand eines Querschnitts gegen Abscheeren



$$\int_0^a x dF = P \cdot R = \text{dem Torsionsmoment,}$$




wo δ der Abscheerungswiderstand pro Quadrat. einheit in der Entfernung x von der Drehachse.

oder da $\delta : \delta_0 = x : a$, wo δ_0 der Abscheerungswiderstand in der äußersten Faser, so ist

$$PR = \frac{\sigma_0}{a} \int x^2 dF = \frac{\sigma_0}{a} \Theta_0 \quad (1.)$$

wo Θ_0 das Trägheitsmoment des Querschnitts in Bezug auf die Drehachse; $\Theta_0 = \Theta_1 + \Theta_2$, (wo Θ_1 und Θ_2 die Trägheitsmomente für zwei in der Querschnittsebene liegende zu einander senkrechte S -Achsen.)

Tabelle von Θ_0 für versch. Querschn.

		
$\frac{d^4 \pi}{32}$	$\frac{\pi}{32} (D^4 - d^4)$	$\frac{h^4}{6}$

§. 27.

Wellen - Berechnung.

a.) in Rücksicht auf die Scheerfestigkeit (Torsionsfestigkeit).

Ist N die Anzahl der Pferdekräfte ($75 \frac{\text{mtrkg}}{\text{p. Sec.}}$)

n die Anzahl der Umdrehungen pro Minute,

so ist

$$PR = \frac{60 \cdot 7500}{2 \cdot 3,14} \cdot \frac{N}{n} = 71620 \frac{N}{n}$$

somit wenn d der Durchmesser einer vollen Welle:

$$2.) \left\{ \begin{array}{l} \text{f. Schmiedeeisen (wo } \sigma_0 = 210^{kg} \text{ pro } cm) d^{cm} = 12 \sqrt[3]{\frac{N}{n}} \\ \text{f. Guss Eisen (wo } \sigma_0 = 90^{kg} \text{ pro } cm) d^{cm} = 16 \sqrt[3]{\frac{N}{n}} \\ \text{f. Holz (wo } \sigma_0 = 20^{kg} \text{ pro } cm) h^{cm} = \sqrt[3]{\frac{71620 PR}{\sigma_0}} \end{array} \right.$$

in kg.cm.

b.) in Rücksicht auf den Torsionswinkel.

Die Größe der Verdrehung einer äußersten Längsfaser nennt man Torsionswinkel (α), Es ist

$$\alpha = \frac{\sigma_0}{G} \quad , \text{ wo } \sigma_0 \text{ die Scheerspanne}$$

nung dieser äußersten Faser und G der Modul für die Torsionselasticität; derselbe ist:

für Schmiedeisen 800000 kg / q. cm.

für Gussisen 400000 "

für Holz 10000 "

Die größte Verdrehung eines Punkts am Umfang des Endquerschnitts findet sich

$$\beta = \frac{s_0 \cdot l}{\alpha \cdot G} \quad \text{oder mit Hilfe von (1.)}$$

$$\beta = \frac{l}{G} \cdot \frac{PR}{\theta_0} \\ = 71620 \frac{N \cdot l}{n \cdot G \cdot \theta_0}$$

Practisch zulässig ist

$$\beta_{\max} = 1^\circ \text{ für } l = 400$$

also für schmiedeiserne runde Wellen:

$$\beta^\circ = 1^\circ = \frac{71620 \cdot 400 \cdot 180 \cdot 32}{d^4 \cdot 800000 \cdot \pi} \cdot \frac{N}{n} \quad (\text{in Graden}).$$

d. h.

$$d = 12 \sqrt[4]{\frac{N}{n}} \quad (3.)$$

V.

Theorie der Scheerfestigkeit.

S. 28. Bezeichnungen.

In folgendem bedeuten:

- τ_z horizontale Schubspannungen
- τ_v vertikale Schubspannungen
- τ_x beliebige Schubspannungen.
- s_z horizontale Normalspannungen.
- s_v vertikale Normalspannungen.

σ_x beliebige Normalspannungen.

§. 29. Definition.

Ein auf Biegung beanspruchter Stab erleidet nicht allein Normalspannungen, sondern auch nach jeder Richtung Schubspannungen.

§. 30.

1. Horizontale Schubspannung.

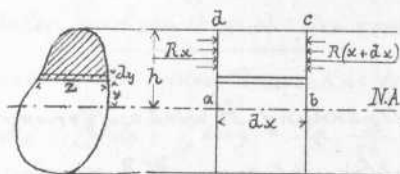


Fig. 1.

Für ein Element des Querschnitts x von der Breite z und Höhe dy im Abstand y von N.A. ist die Normalspannung

$dR = \sigma'_x \cdot y \cdot z \cdot dy$, wo σ'_x die Normalspannung pro Flächeneinheit in der Entfernung y von N.A.; folglich die Normalspannung des Querschnitts x von y bis h :

$$R_x = \sigma'_x \int_y^h y \cdot z \cdot dy = \frac{M_x}{I} \int_y^h y \cdot z \cdot dy.$$

ebenso: $R_{x+dx} = \frac{M_{x+dx}}{I} \int_y^h y \cdot z \cdot dy$

Also vermöge des Gleich-

gewichts des Balkentheils $abcd$ die in ab wirkende Schubkraft in der Richtung von R_{x+dx}

$$(1.) \quad H = R_x - R_{x+dx} = \frac{M_x - M_{x+dx}}{I} \int_y^h y \cdot z \cdot dy$$

Graphische Darstellung von $\int_y^h y \cdot z \cdot dy$

Ist P der Schnitt der Ebene der zu bestimmenden Schubkraft mit dem Seilpolygon des Trägheitsradius (siehe Seite 6.), so ergibt eine Momentengleichung um

und $b dy (\frac{1}{r^2} + d \frac{1}{r^3})$.

Die Normalspannungen dürfen je als gleich und direct entgegengesetzt angenommen werden, so daß sie ein Gleichgewichtssystem bilden; es müssen also, da weitere Kräfte nicht wirken, die Schubspannungen unter sich ebenfalls ein Gleichgewichtssystem bilden.

Mit Vernachlässigung der unendlich kleinen Größe zweiter Ordnung ist nun:

(4.) $\frac{1}{r^2} = \frac{1}{r^2}$ d.h. für jeden Punkt eines gebogenen Balkens ist die vertikale Schubspannung gleich der horizontalen und somit auch die vertikale Schubspannung pro Flächeneinheit eines Querschnittselements $b dy$

$$(5.) \frac{1}{r^2} b dy = \frac{1}{r^2} b dy = \frac{V_x}{r^2} \cdot \frac{e}{2} \cdot b dy = \frac{V_x}{r^2} \cdot \frac{e dy}{2}$$

für den Gesamtquerschnitt ist die vertic. Schubkraft

$$V_x = \frac{V_x}{r^2} \int_{-h_1}^{+h_1} \frac{e dy}{2} = V_x$$

denn

$$\int_{-h_1}^{+h_1} \frac{e dy}{2} = r^2$$

(siehe die Figur.)

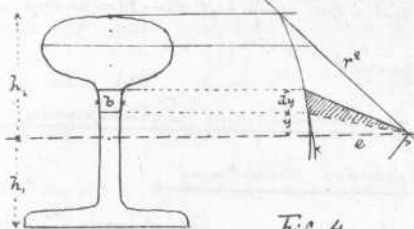


Fig. 4.

§. 32.

3. Schub- und Normalspannungen in be-

liebiger Richtung.

Auf ein Balkenelement abc von der vertikalen Höhe $ab = 1$, der Strecke senkrecht zur Bildfläche $= 1$, und dem variablen Winkel α wirken ein

die Normalspannungen, σ_n bekannt und $\sigma_v \tan \alpha$,

Vorzeichen von σ_r und τ_{xy} bestimmen, betrachten lassen, so sieht man leicht aus der Figur, daß

eintritt wenn

$$\left. \begin{array}{ll} \sigma_r - \max. & E \text{ nach } E_1 \text{ rückt oder } FE_1 \\ \sigma_r + \max. & E \text{ " } E_2 \text{ " " } FE_2 \\ \tau_{xy} - \max. & E \text{ " } E_3 \text{ " " } FE_3 \\ \tau_{xy} + \max. & E \text{ " } E_4 \text{ " " } FE_4 \end{array} \right\} \text{ die Richtg. d. Fläche ist.}$$

Man erkennt zugleich, daß für dasselbe Flächenelement die Richtungen der Flächen

des $+$ max. und $-$ max. } der Normalspannung mit denen

des $+$ max. und $-$ max. } der Schubspannung je einen Winkel von

90° ; die Flächen für die Maxima der Normal-Spannungen mit denen für die Maxima der Schubspgn. einen Winkel von 45° bilden.

Die Winkel sind zwischen

$$+ \sigma_r \max \text{ und } - \sigma_r \max = 90^\circ$$

$$+ \tau_{xy} \max \text{ und } - \tau_{xy} \max = 90^\circ$$

$$- \sigma_r \max + \tau_{xy} \max = 45^\circ$$

$$+ \tau_{xy} \max + \sigma_r \max = 45^\circ$$

$$+ \sigma_r \max - \tau_{xy} \max = 45^\circ$$

Die analytischen Ausdrücke der \pm Maxima

der Normal } Spannungen bestimmen sich nach

$$\sigma_{r \max} = -\frac{\sigma_h}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_h}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

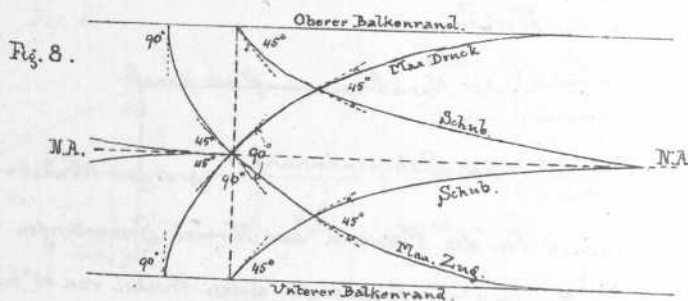
$$\tau_{xy \max} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_h}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

§. 33.

Spannungstrajektorien.

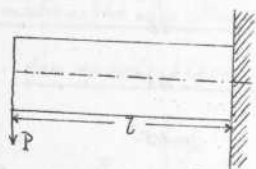
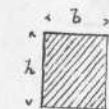
Die Spannungstrajektorien geben für alle von den.

selben getroffenen Körperelemente die Richtungen der Max. Zug-, Druck- u. Schubspannungen, und werden Tangenten derselben erhalten, wenn man nach §. 32 für Elemente irgend eines Querschnitts Größe und Richtung der Max. Spannungen bestimmt, die Richtungen bis zu einem nächsten Querschnitt verlängert, für die Schnittpunkte die Richtungen der Max. Spannungen wieder bestimmt, dieselben wieder verlängert etc., so daß sich schließlich Curven von folgender Form ergeben.



§. 34.

1. Bei einer hölzernen Console, die an einem Ende eingespannt, am andern mit P belastet ist, kommt in Betracht:

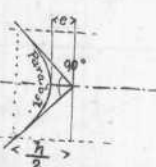
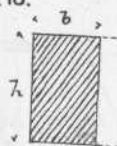


a. die Biegezugfestigkeit in der oberen } Faser:
unteren }

$$M_{\max} = Pl = 3 \cdot \frac{bh^2}{6}, \text{ also}$$

$$\sigma = \frac{6Pl}{bh^2}$$

Fig. 10.



b. die Scherfestigkeit in der Neutralfaser:

$$\tau_s = \frac{V}{2r^2} \cdot \frac{e}{b} = \frac{3P}{2bh}$$

Da für Holz

$$\sigma_k : \tau_s = 5 : 0,6, \text{ so wird die}$$

Console gleichzeitig auf zul. } Zug- } und Scheerspannung bean-
sprucht, wenn } Druck }

$$\frac{6Pl}{bh^2} : \frac{3P}{2bh} = 5 : 0,6 \quad \text{d.h. wenn}$$

$$h = 0,5l.$$

Consolen, deren Höhe $\begin{cases} \text{kleiner} \\ \text{größer} \end{cases}$ als $0,5l$, sind auf $\begin{cases} \text{Scher} \\ \text{Biegungs} \end{cases}$ Festigkeit zu berechnen.

§. 35.

Verzahnte und verdübelte Balken.

Die Gesamtdimensionen werden aus dem



Fig. II. Maximalbiegemoment nach der Formel

$$\sigma = \frac{6M_{\max}}{bh^2} \text{ bestimmt.}$$

Die Dimensionen der Dübel,

welche die auf die Länge l in der neutralen Faserschichte AB wirken,

der horizontalen Schubspannung R aufzunehmen haben, bestimmen

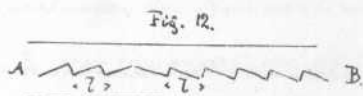


Fig. 12.

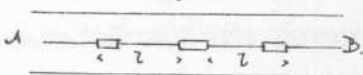


Fig. 13.

sich aus $R = \frac{l}{2r^2} \{ M_a - M_{(x+l)} \}$, oder wenn die Schubspannung auf der Strecke l constant angenommen wird

$$R = \frac{3Vl}{2h} \quad \text{Da } R, \text{ bzw. } V \text{ variabel sind,}$$

müssen auch die Dübel-, bzw. Zähndimensionen oder aber die Länge l geändert werden, wenn für alle Dübel, bzw. Zähne die Inanspruchnahme gleich groß sein soll.

Wenn sich mobile Last auf dem Balken bewegt, so sind Dübel den Zähnen vorzuziehen, da die ersteren nach beiden Seiten wirken und bei mobiler Last R von rechts nach links und von links nach rechts wirken kann.

Anhang.§. 36.Einiges über Blechträger und Nietungen.

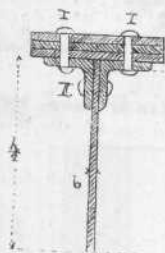
Die Gurtungen der Blechträger werden berechnet nach §. 20 Gleichg (12), (13), (14) für ein gegebenes M , wobei die Blechwanddicke b vorerst angenommen wird.

Die Blechwand muß auf Festigkeit gegen Abscheeren untersucht werden und dies geschieht, indem man nach Gl. 3 §. 30 die Scheerspannung in der neutralen Faserschichte über dem Auflager bestimmt, da dieselbe hier am größten ist.

NB. Es können nun aber, wenn die Blechwandhöhe h sehr groß ist, am Anschluß der Blechwand an die Gurtungen in ersterer schiefe Spannungen auftreten, welche dieselbe mehr beanspruchen als die Scheerspannung in der N.A.; manche nehmen deshalb die zulässige Inanspruchnahme gegen Abscheerung nur zu $3/5$ kg p. \square mm an.

Zur Controle berechnet man, nachdem die Dimensionen des Trägers bestimmt sind, die Inanspruchnahmen am besten je in dem Querschnitt, wo eine Gurtungsplatte aufhört.

Die Nietverbindungen berechnen sich wie folgt:



Die Schubkraft, welche die Gurtung gegen die Blechwand zu verschieben sucht, ist pro 1^m Länge:

$$H = b \cdot 1^m \cdot \frac{1}{b} = \frac{V}{r^2} \cdot \frac{e \cdot 1^m}{2}$$

oder da annähernd $e = \frac{h}{2}$

und $r^2 = \frac{h^2}{4}$

$$(6.) \quad H = \frac{V}{h}$$

Diese wird aufgenommen durch die Scheerfestigkeit a pro \square mm von n Nieten, deren Querschnitte je $f = \frac{2^2 \pi}{4}$ und man er-

hält pro 1 m. Länge :

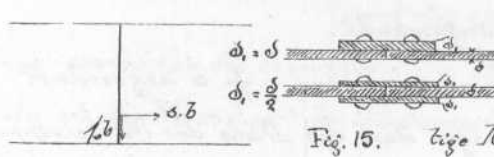
einschnittl. Nietn. I. Doppelschn. N. b. II.

n genau	$\frac{\sigma V}{2fr^2a}$	$\frac{\sigma V}{4fr^2a}$
n circa	$\frac{V}{Fha}$	$\frac{V}{2Fha}$
n genau	$\frac{\sigma V}{2nfr^2}$	$\frac{\sigma V}{4nfr^2}$
n circa	$\frac{V}{nfh}$	$\frac{V}{2nfh}$

Die Zahl der Nieten I ist $= n$, die der Nieten II $= \frac{n}{2}$

Die Vernietungen der Längsträger mit den Querträgern und dieser mit der Tragwand werden ebenfalls nach ob. Gleich. (6.) berechnet und gelten dieselben Ausdrücke für n und a wie für die Vernietungen der Blochwand mit den Gurtungen.

Die Vernietung der Stöße der Blochwand hat einer aus Normal- und Scheerspannung sich zusammensetzenden schiefen Spannung zu widerstehen und man hat für eine einschnittige Niete.

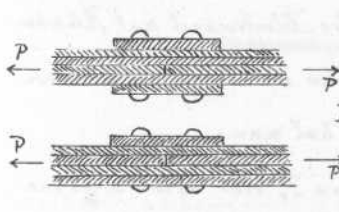


$$\frac{\sigma d^2 a}{4} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}b\right)^2 + (\delta b)^2} = N$$

für eine Doppelschnitt.

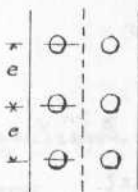
Fig. 15. tige Nieten $\frac{\sigma d^2 a}{2} = N$.

Ist P die in einem Querschnitt wirkende Spannung pro 1 m. Höhe, so ist die Anzahl der Nieten pro 1 m. Höhe



$$\begin{cases} n = \frac{4P}{\sigma a d^2} & (\text{einschnittig}) \\ n = \frac{2P}{\sigma a d^2} & (\text{doppelschnittig}). \end{cases}$$

und daraus die Entfernung e der Nieten $e = \frac{1m}{n}$

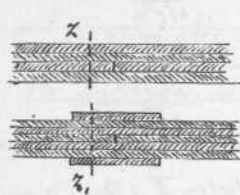


Die Verschwächung des Querschnittes durch Nietlöcher muß aufgehoben werden durch einen Zuschlag zu den Querschnittsdimensionen; d.h. besteht ein Quer-

schnitt aus m Blochplatten von der Breite b und Dicke δ und ist die Verschwächung durch ein Nietloch $= f$, so ist als nutzbarer

Querschnitt in Rechnung zu stellen,

a.) wenn keine Stosplatte vorhanden und Z die



Anzahl der Nieten in der Nietreihe

zunächst dem Stols ist:

$$F_1 = (m-1) b \cdot \delta - Z \cdot f, \text{ wobei}$$

vorausgesetzt ist, daß in einem Quer-

schnitt immer nur eine Platte gestossen ist;

b.) wenn Stosplatten angewandt sind und Z , die

Anzahl der Nieten zunächst dem Stosplattenende ist:

$$F_1 = m b \delta - Z \cdot f.$$

Als praktische Regeln gelten:

- 1.) Genietete Träger werden in Spannweiten δ über 10 m. gewöhnlich nicht angewandt.
- 2.) Die Höhe h wird annähernd $= \frac{1}{10} \delta$ angeordnet.
- 3.) Für Brückenträger darf die Dicke der Mittelrippe nicht unter 9 mm. genommen werden.

Bei Trägern, welche diesen drei Bedingungen entsprechen, braucht die Festigkeit der Blechwand auf Abschöpfung als jedenfalls genügend nicht mehr berechnet zu werden.

Als einfache Formeln hat man:

$$Q = \frac{b h^3}{12} + \frac{F_1 h^2}{2}, \text{ wo } F_1 \text{ der Gurtungsquer-}$$

$$\text{schnitt; } M = \delta h \left\{ \frac{b h}{6} + F_1 \right\}, \text{ woraus}$$

$$F_1 = \frac{M}{\delta h} - \frac{b h}{6}$$

Unter Annahme einer gleichförmigen Belastung q pro Längeneinheit ist $M = \frac{q}{2} \left\{ \left(\frac{l}{2} \right)^2 - x^2 \right\}$, wenn x der Abstand des Querschnitts von der Balkenmitte und l die Stützweite; die Stelle, wo eine Gurtungsplatte aufhören kann,

bestimmt sich demnach aus

$$\alpha = \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 - \frac{2sh}{9} \left\{ \frac{bh}{8} + F_1' \right\}}, \text{ wobei } F_1' \text{ derum}$$

die Platte verminderte Querschnitt ist.

Nietendurchmesser 15 bis 25^{mm} oder

$\frac{1}{8}$ bis $\frac{1}{4}$ der Bolzenlänge.

Nietenabstand max. 15 δ (wo δ Blechdicke)

min. 5 δ .

Abstand vom Blechrand ca. 3 δ .

Der Nietenabstand wird für Vernietung der Gur-



tungswinkel mit der Blech-

Fig. 18. wand am Auflager bestimmt

und die sich ergebende Nietentheil-

lung sowohl für die Vernietung der Blechwand mit den Win-

keln als der Winkel mit den Gurtungsplatten über die ganze

Trägerlänge constant genommen.

Correcturen

zu Kapitel I.

Seite 6 Zeile 11 v.u. lies: Parabelsegment statt Parabel.

" 7 " 3 v.o. " : auf eine in O zur

" 8 " 2 v.o. " : $\frac{h^2}{i^2} = \frac{h_1}{i_1}$ statt $= \frac{h_1}{i}$

" 9 " 2 v.o. " : Glöhg (16) statt 18.

" 10 " 7 v.o. " : 3. die Schwerpunkthauptachsen.

" 11 " 6 v.o. " : Schnittpunkt st. Schwerpunkt.

" 12 " 1 v.o. " : §. 8,2 statt §. 9,2

" 16 " 1 " " : y desselben statt z desselben.

" " " 3 " " : wo $y = z$, d.h. ein Max.: statt:
wo z ein Maximum.

TECHN. MECHANIK.

II. Kapitel.

Berechnung der

FACHWERKE

unter Annahme einer gleichmässig vertheilten
mobilen Belastung.

Herausgegeben
vom Ingenieur-Verein.
Polytechnikum Stuttgart.

1875.

THE MECHANIK

II. Kapitel

Bestimmung der

TSCHWERERKE

1. Bestimmung der

Bestimmung der

Bestimmung der

Bestimmung der

1878

Statik

der

Fachwerks - Constructionen.

A.

Allgemeine Entwicklung.

§. 1.

Fundamentalsätze über Kräfte in der Ebene.

1. Die statische Wirkung einer Kraft ist bestimmt durch ihre Lage, (die Richtungslinie, in welcher die Kraft wirkt, bestimmt durch ein Coordinatensystem in ihrer Ebene), Größe (Gewicht; graphisch Strecke auf der Richtungslinie) und Richtung (\pm , graphisch versinnlicht durch einen Pfeil auf der Richtungslinie).

NB. Die Lage des Angriffspunctes auf der Richtungslinie ist für die statische Wirkung gleichgiltig.

2. Zwei Kräfte P_1 und P_2 können ihrer statischen Wirkung nach ersetzt werden durch eine Kraft R (Mittelkraft, Resultante), deren Richtungslinie durch den

Schnittpunkt der Richtungslinien von P_1 und P_2 geht und deren Grösse und Richtung sich ergibt als Verbindungs-

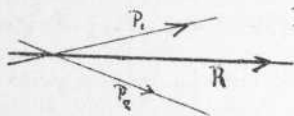


Fig. 1. Linie des Anfangspunctes A und des Endpunctes C des polygonalen Zuges ABC (Kräftepolygon), der con-

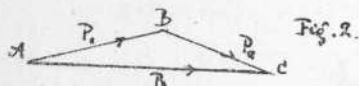


Fig. 2.

struirt ist aus den parallel zu ihren Richtungslinien in dem selben Sinne zusammengetragenen Kräften P_1 und P_2 .

3. Die Mittelkraft aus mehr als zwei Kräften erhält man der Grösse und Richtung nach aus (Fig. 3) dem Kräfte-

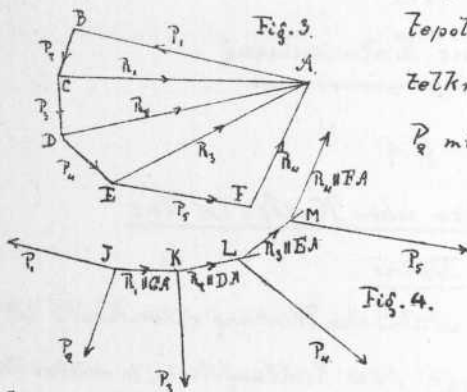


Fig. 3.

topolygon, in dem man die Mittelkraft R_1 zweier Kräfte P_1 und P_2 mit P_3 , die entstehende Mittelkraft R_2 von R_1 und P_3 mit P_4 u.s.f. zusammensetzt.

Fig. 4.

Die Lage der Mittelkraft erhält man aus Fig. 4., dem Seilpolygon, in dem die Richtungslinie von R_1 durch den Schnitt von P_1 und P_2 , die von R_2 durch den Schnitt von R_1 und P_3 u.s.f. gehen muß.

NB. Das Seilpolygon ist nur ausführbar, wenn die Punkte $JKLM$ auf dem Zeichnungsblatte liegen; ist dies nicht der Fall, wie z.B. immer bei parallelen Kräften, so fügt

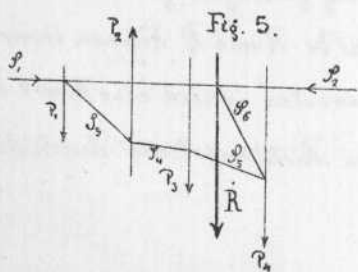


Fig. 5.

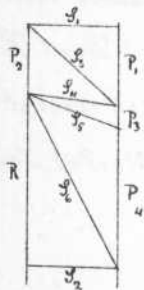


Fig. 6.

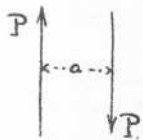
man dem S_y strom zwei in einer Geraden wirkende gleiches und entge-

gegengesetzte Kräfte S und S_0 an, erhält dann seine Mittelkraft nach Fig. 5 und 6., wobei man im Kräftepolygon, um ein Überdecken der Kräfte zu verhüten, die abwärts gerichteten parallelen Kräfte auf der einen, die aufwärts gerichteten auf der andern Seite im Kräftepolygon anbringt.

4. Analytisch wird die Mittelkraft nach Größe und Richtung bestimmt durch Projectionsgleichungen nach dem Satz, daß die algebr. Summe der Projectionen sämtlicher Seitenkräfte gleich ist der Projection der Mittelkraft. Der Lage nach wird sie bestimmt mittelst Momentengleichungen nach dem Satz, daß die Summe der stat. Momente der Seitenkräfte in Bez. auf irgend einen Punkt gleich ist dem stat. Moment der Mittelkraft in Bez. auf denselben Punkt.

5. Zwei gleiche, entgegenges. gericht., u. parall. Kräfte nennt man ein Kräftepaar; die Mittelkraft eines solchen ist $= 0$;

Fig. 7. der Angriffspunkt derselben liegt im Unendlichen; das Moment derselben in Bez. auf einen bel. Punkt ist $= P \cdot a$, wo a die Entfernung der parallelen Kräfte ist.



Gleichgewicht v. Kräften in der Ebene.

6a. n Kräfte in der Ebene sind im Gleichgewicht wenn ihre Mittelkraft $= 0$ und das Moment derselben in Beziehg. auf einen belieb. Punkt ebenfalls $= 0$ ist.

Graphisch wird dies dadurch erkannt, daß das aus den Kräften gebildete Kräftepolygon sich schließt und daß die Lage der Resultante von $n-1$ Kräften mit der n ten Kraft zusammenfällt.

analytisch dadurch, daß die Summe der Projectionen auf beliebige Achsen = 0 und die Summe der statischen Momente in Beziehung auf beliebige Punkte = 0; drei von diesen Gleichgewichtsgleichungen sind nothwendig und genügend.

6. Gehen sämtliche Kräfte durch einen Punkt, so findet Gleichgewicht statt, wenn das Kräftepolygon sich schließt, bezögen zwei Gleichgewichtsgleichungen stattfinden.

Für Kräfte, die durch einen Punkt gehen, hat man also nur zwei Gleichgewichtsgleichungen, für beliebig in der Ebene liegende Kräfte hat man deren drei. — Es dürfen daher, wenn Aufgaben statisch lösbar sein sollen, im ersten Fall nur 2; im letzten Fall nur 3 Unbekannte zur Bestimmung gegeben sein.

§. 2.

Allgemeine Form d. stat. Aufgaben.

1. n Kräfte, die durch einen Punkt gehen, sollen ein Gleichgewichtssystem bilden.

Von $n-2$ ist Größe, Lage und Richtung, von den zwei übrigen nur die Lage bekannt; es soll deren Größe und Richtung bestimmt werden.

Graph. Lösung. Man construirt aus den geg. Kräften einen polygonalen Zug, indem man dieselben in bel.

Fig. 8.

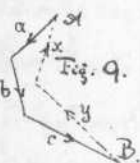
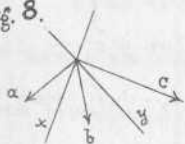


Fig. 9.

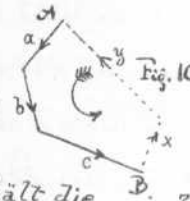


Fig. 10.

Reihenfolge, aber in immer gleichem Sinne aneinanderträgt und erhält die zwei unbekannten Kräfte, indem man durch den Anfangs- und Endpunkt A

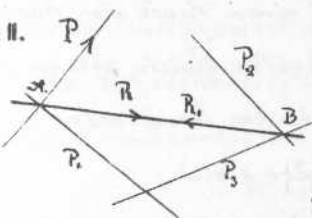
und B Parallelen mit den geg. Richtungslinien zieht; man erhält zwei identische Lösungen.

(Fig 9 und 10.)

Analyt. Lösung: Wenn die Kräfte analytisch gegeben sind, geschieht dieselbe mittelst zweier Projectionsgleichungen; wenn sie graphisch gegeben sind mittelst zweier Momentengleichungen, wobei die Momentenpunkte jedesmal auf der Richtungslinie einer der unbekannten Kräfte angenommen wird.

2. Eine Kraft P ist gegeben und die Lage von drei Kräften P_1, P_2, P_3 ; deren Größe und Richtung für den Fall des Gleichgewichts zu bestimmen.

Fig. 11.



(Die 4 Kräfte dürfen nicht durch einen Punkt gehen, sonst ist die Aufgabe überbestimmt.)

Graph. Lösung. Die Resultante

R von P und einer der drei Kräfte muß durch den Schnittpunkt der betreffenden Richtungslinien, für P und P_1 z.B. durch A gehen, ebenso muß die Resultante R_1 von P_2 und P_3 durch B gehen; das System ist aber nur im Gleichgewicht, wenn R und R_1 gleich und entgegengesetzt sind und in einer Geraden wirken, also ist AB die Lage der Resultante von P und P_1 einerseits, P_2 und P_3 andererseits.

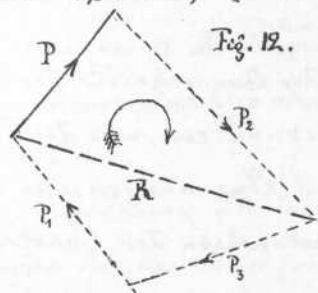


Fig. 12.

Man konstruiert nun aus P und den Richtungen von R und P_2 ein Kräfte Dreieck, dann aus R und den Richtungen von P_1 und P_3 ein solches.

Analytische Lösung: durch Aufstellen von Momentengleichungen, wobei man den Momentenpunkt je auf dem Schnittpunkt von zwei unbekannten Kräften wählt.

Schneiden sich zwei der unbekannten Kräfte, z.B. P_1 und P_2 nicht mehr auf dem Zeichnungsblatt, so ist die Lösung folgende:

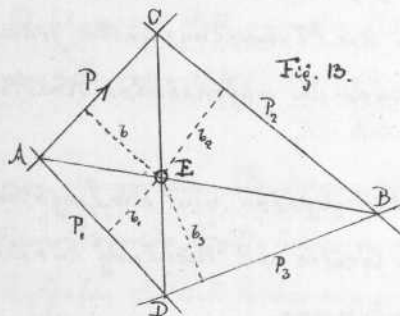


Fig. 13.

Punkt P_1 , P_2 und P_3 zusammengesetzt geben gleiche und entgegengesetzte Resultanten in der Richtung AB , bzw. BA .
Punkt P_2 , P_1 und P_3 dasselbe in der Richtung CD , bzw. DC .

In Beziehung auf einen Punkt der Resultante sind die Momente der Seitenkräfte gleich, also in Bezug auf den Schnittpunkt E der beiden Resultanten die Momente von P_1, P_2, P_3 einander gleich.

$$P_1 b_1 = P_2 b_2 = P_3 b_3$$

§. 3.

Definition der Fachwerke.

Fachwerke sind Dreiecksconstructionen, die aus stabförmigen Theilen so zusammengesetzt sind, daß in Folge von Belastungen nur Längenveränderungen, aber keine Biegungen eintreten können.

Zweck derselben ist, die Querschnitte der Constructionstheile vollständig auszunützen, was der Fall ist, wenn die inneren Kräfte und Spannungen nur in den Richtungen der Schwerpunktsachsen der Constructi-

onstheile wirken.

Bedingungen eines Fachwerks sind demnach:

1. Die einzelnen Stücke eines Fachwerkes müssen Dreiecke bilden, weil nur bei diesen keine Formveränderungen außer Längenausdehnung oder Verkürzung der die Seiten bildenden Stäbe eintreten kann.
2. Die Schwerpunktsachsen aller in einem Knoten zusammentreffenden Constructionstheile müssen sich in einem Punkte schneiden.
3. Die Auflsenkräfte (Belastungen) dürfen nur in diesen Knotenpunkten einwirken.
4. Die Verbindung der einzelnen Constructionstheile im Knotenpunkt soll charnierförmig sein.

Die Vernachlässigung der Bedingung 4.) ist bei größeren Constructionen nicht bedenklich.

Zur Festlegung von n Knotenpunkten sind $3+2(n-3)$, also $2n-3$ Constructionstheile erforderlich.

§. 4.

Allgemeine Art der Berechnung.

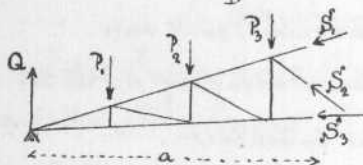
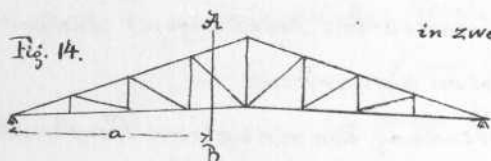
1. Vorbemerkung. Stellt man für jeden Knotenpunkt die Gleichgewichtsgleichungen auf, so erhält man bei n Knotenpunkten $2n$ Gleichungen, da man immer durch je einen Punkt gehende Gleichgewichtssysteme hat.

In diesen $2n$ Gleichungen sind auch die Bedingungen für das Gleichgewicht der an den Knotenpunkten

wirkenden Aussenkräfte enthalten, was durch drei Gleichgewichtsbedingungen besonders ausgedrückt werden kann; man hat also zur Berechnung der Constructionstheile nur noch $2n-3$ Gleichungen, welche nöthig sind, da man bei n Knotenpunkten auch $2n-3$ Constructionstheile hat.

Bei der Berechnung verfährt man nun am besten wie folgt:

2. Verfahren. Die „Construction“ wird durch einen Schnitt AB , der nur drei Constructionstheile treffen darf,



in zwei Theile getheilt; be-

hufs Herstellung
des Gleichgewichtes

werden in den geschnittenen Constructionstheilen die entsprechenden Span-

nungen als Aussenkräfte angebracht; nun werden die Gleichgewichtsbedingungen für einen solchen Trägertheil a aufgestellt und erfolgt die Bestimmung der Spannungen nach Aufgabe 1 oder 2. (Seite 48 u. 49).

3. Bestimmung der Grenzspannungen (Zug u. Druckmaximum) für einen Constructionstheil. Die Spannung, welche in einem Constructionstheil durch die Belastung verschiedener Knotenpunkte hervorgebracht wird, ist gleich der algebraischen Summe der Spannungen, welche je durch die Belastung der einzelnen Knotenpunkte erzeugt werden.

4. Wird ein Fachwerksconstructionstheil so geschnitten, daß außer ihm nur noch zwei Constructionstheil-

Le vom Schnitte getroffen werden, die sich mit dem ersten nicht

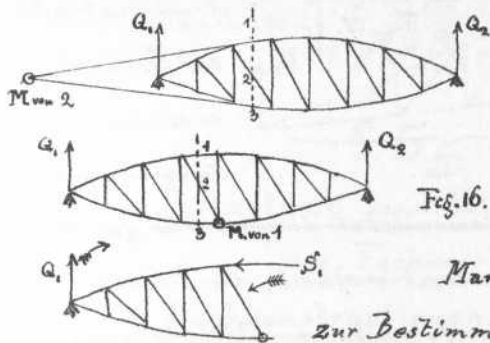


Fig. 16.

in einem Punkte schneiden, so heißt der Schnitt der beiden Lagen der Momentenpunkt des ersten.

Man hat nun folgende Regeln zur Bestimmung der Wirkung einer

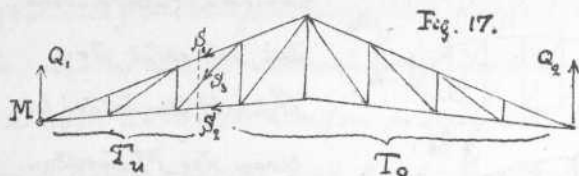
Außenkraft.

1^{te} Regel. Liegt der Momentenpunkt eines Constructionstheils innerhalb des von den Richtungen der Auflagerdrücke eingeschlossenen Flächenraums oder kurz: liegt derselbe zwischen Q_1 und Q_2 , so bringt jede Belastung des Trägers dieselbe Art der Spannung in dem Constructionstheil hervor, und zwar Druckspannung, wenn der Momentenpunkt unter dem Constructionstheil liegt, Zugspannung, wenn er über demselben liegt. Ein solcher Constructionstheil erhält also bei Vollbelastung sein Spannungsmaximum (Quertungen).

Bezeichnet man den Trägetheil, in welchem der obere Knotenpunkt eines Constructionstheils liegt, mit T_o , den, in welchem der untere liegt, mit T_u , so hat man:

2^{te} Regel. Liegt der Momentenpunkt außerhalb Q_1 und Q_2 , so erzeugen Belastungen des Trägetheils T_o Druckspannungen in den Constructionstheilen, Belastungen des Trägetheils T_u Zugspannungen in denselben.

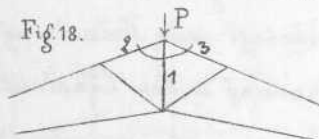
3^{te} Regel. Fällt der Momentenpunct eines Con-



structionstheils
auf Q_1 oder Q_2 ,
so erzeugen die
Belastungen

des vom Momentenpunct abgewendeten Trägertheils gar kei-
ne Spannungen in dem Constructionstheil; die Belastungen
des dem Momentenpunct zugewendeten Theils erzeugen
Druck } Spannungen, je nachdem dieser Theil $\left\{ \begin{matrix} T_o \\ T_u \end{matrix} \right\}$ ist.
Zug }

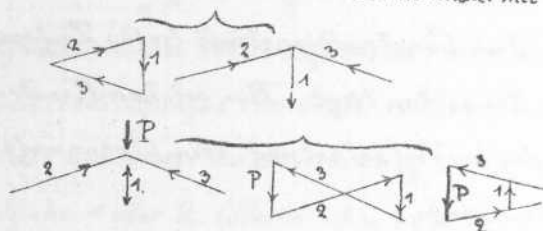
4^{te} Regel. Schneiden sich die drei geschnittenen Con-
structionstheile in einem Punkte, wie z.B. bei der Berechnung
von Theil 1, so erhält man durch Betrachtung der Kräftepläne



in dem betr. Constructionstheil (1):

Zugmax. mit Maxspng in 2 u. 3 u. P_{min} ,

Druckmax. mit 2 u. 3 min. u. P_{max} .



5. Bezeichnet man nun Wirkung der Eigenlast
mit S_a ; Wirkung der gesamten mobilen Last mit S_b ;
Wirkung einer mobilen Belastung sämtlicher Knotenpunkte
links vom Schnitt mit S_c ; Wirkung einer mobilen Belastung
sämtl. Knotenpunkte rechts vom Schnitt mit S_d , so ist

$$S_b = S_c + S_d$$

und die Grenzspannungen sind für die

Gurtungstheile: Min. = S_a
Max. = $S_a + S_b$.

Füllungsheile:

$$2 \text{ Grenzspannungen} \left\{ \begin{aligned} &= S_a + S_c = S_a + S_b - S_d \\ &= S_a + S_d = S_a + S_b - S_c \end{aligned} \right.$$

§. 5.

Belastung und Eigengewicht
von Fachwerken.

1. Dachconstructionen. Die ruhende Last setzt sich zusammen aus dem Gewicht

- a. der Dachfläche (Deckmaterial, Verschalung, Latung).
- b. der Pfetten.
- c. der Dachbinder.
- d. der etwa unten angehängten Deckenconstructionen etc.

Die veränderliche Last setzt sich zusammen

- a. aus Schneeeindruck
- b. Winddruck (von diesem ist jedoch nur die Vertikalcomponente in Rechnung zu bringen, da nur verticale Auflagerwiderstände angenommen werden).
- c. zufällige etwa unten angebrachte Lasten etc.

2. Brückenconstructionen. Die ruhende Last setzt sich zusammen aus dem Gewicht

- a. der Fahrbahn
- b. der Quer- und Längsträger.
- c. der Quer- und Horizontal-Versteifungen.
- d. der Hauptträger.

Die veränderliche Last setzt sich zusammen aus:

a. dem Gewicht der Fahrzeuge

b. dem Winddruck, der hier nur horizontal und gleichmäßig vertheilt wirkend angenommen wird.

NB. Bei Straßenbrücken von über 25 m. Spannweite ent- steht durch Menschengetränge eine stärkere Belastg als durch Fahrzeuge.

Über die Größe obiger Belastun- gen sehe man folg. Tabellen:

Tabelle über Dachneigung, Eisen- u. Eigen-

Gewicht.

Tab. 1.

Material der Eindeckung.	1. Minimal neigung h. Höhe l. Spann. (Büddeldach)	2. Mittl. Ge. wicht der versch. Bin. deckg. mat. p. 1 m. Dachfl.	3. Gewicht der Schalung p. 1 m. Dachfl.	4. Gewicht der LLI Pfetten h. Kg p. 1 m. Dachfl.
Kupferblech	$h = \frac{1}{20} l$	6,25 Kg	10,5	7,5 (45-9)
Zinkblech.	$h = \frac{1}{20} l \left(\frac{1}{2} \text{ bzw } \frac{1}{3} \right)$	6,5	10,5	2:
Wellenzink	2°	7,5	Direkt auf d. Pfetten	2:
Wellenblech	2°	18	2:	9 (8-10)
Glas; 1 ^{ste} Stark	2°	27	auf Eisen sprößen befestigt	10
Schiefer	$h = \frac{1}{5} : \left(\frac{1}{10} \text{ bzw } \frac{1}{8} \right)$	35	10,5	11
Dachpappe.	$h = \frac{1}{20} \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{5} \right)$	15	10,5	9 (8-10)

Tab. 2.

5. Mittl. Eisengewicht d. Dachbinder incl. Pfetten. Mittl. Neigg = 1/5	6. Gesamt eigengewicht d. Zinkdeckg. Kg p. 1 m. Grundfl.
$l = 5 m. E = 15,5^k$	33,5 Kg
10 m. 19	37
15 m. 23,5	41,5
20 m. 29	47
25 m. 35,5	53,5
30 m. 43	61
35 m. 51,5	69,5
40 m. 61	79.

Zufällige Belastung.

Tab. 3.

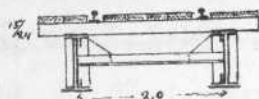
Neigung der Dächer.	Belastung in Kg. p. 1 m. Dachfläche durch		$\frac{1}{\cos \alpha} = \text{Coeff.}$ zur Redukt. der Belastg. auf d. Grund- fläche
	Schnee	Wind	
$h = \frac{7}{10}$	77 ^{Kg}	15	1,020
$\frac{7}{9}$	76	17	1,024
$\frac{7}{8}$	75,5	20	1,031
$\frac{7}{7}$	75	23	1,040
$\frac{7}{6}$	74	28	1,064
$\frac{7}{5}$	73	34	1,077
$\frac{7}{4}$	70	45	1,118
$\frac{7}{3}$	65	66	1,202
$\frac{7}{2}$	55	109	1,414

Für Bogendächer ist

nach Schwedler die zufäl- lige Belastung durch Schnee- und Winddruck zusammen = 125 Kg.

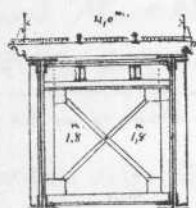
Formel zur Berechnung des Eisengewichtes der Bin- der incl. Pfetten:

Anordnung der Fahrbahn.



$$e = 0,9$$

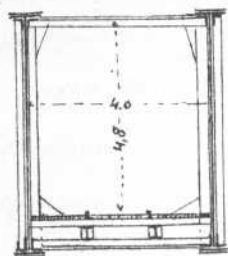
$$F = 275 \frac{\text{kg}}{\text{p. Z. m.}}$$



$$e = 1,8$$

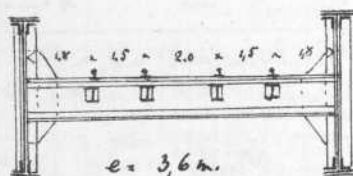
$$F = 775 \frac{\text{kg}}{\text{p. Z. m.}}$$

$$F_1 = 385 "$$



$$e = 1,8 \text{ m.}$$

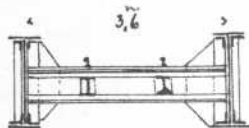
$$F = 760 \text{ kg. } F_1 = 510 \text{ kg. p. l. m.}$$



$$e = 3,6 \text{ m.}$$

$$F = 1720 \text{ kg.}$$

$$F_1 = 1212 \text{ kg.}$$



$$e = 1,8 \text{ m.}$$

$$F = 550 \text{ kg. p. l. m.}$$

$$F_1 = 360 \text{ kg. }$$

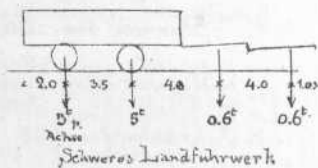
In Obigem bedeutet:

F Gewicht d. Fahrbahn (incl. Schwellen, Schienen, Bedienung und Querträger:

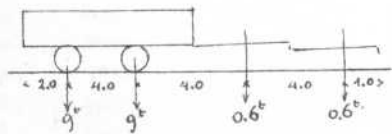
F_1 Fahrbahngewicht ohne Querträger p. l. m.

e Entfernung der Querträger.

Strassenbrücken. Mobile Belastung.



Schweres Landfuhrwerk



Transportwagen f. schwere Maschinen etc.

Belastung durch Menschengedränge.

a. Zur Bestimmung der Hauptträger von 25^m Sp.w. an $360 \frac{\text{kg}}{\text{p. m.}}$

b. " " Trottoirbestandtheile $560 \frac{\text{kg}}{\text{p. m.}}$

c. Die Belastung durch Fuhrwerke dient zur Berechnung der Quer- und Längsträger.

Nach Laible und Schübler :

Spannweite l	4 ^m	10 ^m	15 ^m	20 ^m
Gleichm. vertheilte mob. Last p. l. m.	3215 ^{kg}	2910 ^{kg}	2470 ^{kg}	2080 ^{kg}
Fahrbahnbreite = 5 m.				

Eigengewicht der Hauptträger = E kg p. l. m.

p = gleichmäßig verth. mobile Belastung in kg. p. l. m.

F = Gewicht der Fahrbahn in kg. p. l. m.

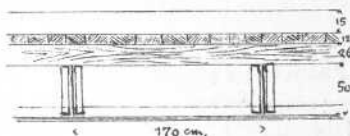
$$E = \frac{l(p+F)}{260-l} \quad (\text{für schwerere Fahrbahnen})$$

$$E = \frac{l(p+F)}{220-l} \quad (\text{für leichtere Fahrbahnen}).$$

Anordnung und Gewicht der Fahrbahn (Breite = 5^m)

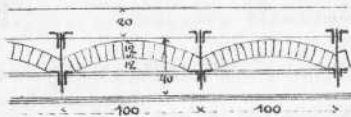
Gewichtszunahme bei einem Bahnbreitenzuwachs von 1 m.

= ca. 10 Kg p. □ m.



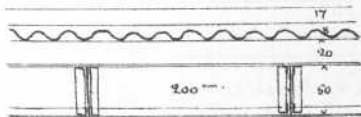
Gew. d. Fahrbahn : 484 Kg p. □ m.

d. ohne Hauptquerträger : 434 Kg. "



Gew. d. Fahrbahn : 772 Kg p. □ m.
(Ziegelgewölbe)

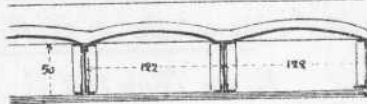
d. ohne Hauptquerträger : 590 Kg p. □ m.



Gew. d. Fahrbahn : 570 Kg p. □ m.

d. ohne Hauptquerträger : 525 Kg p. □ m.

Schotterhöhe = 15 cm, Asphalthöhe = 5 cm.



Gew. d. Fahrbahn : 536 Kg p. □ m.
(Buckelgitter)

d. ohne Hauptquerträger : 405 Kg p. □ m.

Schotterhöhe = 15 cm.

Belastung der Brücken durch Wind und Schnee.

a. durch Wind. Winddruck p. □ m. vertikale Fläche = $(200-l)$ Kg.

bei $l > 100$ m. Winddruck p. □ m. = 100 Kg. nach Bauv. v. Haenel.

Nach Angaben der Berliner "Hütte" :

Winddruck p. □ m. = 125 Kg. auf die als voll betrachteten Träger.

b. durch Schnee. Belastung bei einer größten Schneehöhe von 60 cm. pro 1 m. horiz. Fläche: 75-80 Kg.

Festigkeitscoefficienten, die bei derartigen Constructionen zu Grunde zu legen sind.

a. bei den Brückenconstructionen:

1. Schmiedeeisen (Zug u. Druck) p. 1^{cm} = 650 Kg.
2. Guss-eisen { Zugfestigkeit = 260 Kg.
Druckfestigkeit = 700 Kg.
3. Holz (Zug- u. Druckfestigkeit) = 62 Kg.

b. bei den Dachconstructionen:

1. Schmiedeeisen (Zug u. Druck) = 800 - 1000 Kg.

B.

Berechnung von Fachwerken.

Bem: Positive Spanng. = Zug, negative = Druck.

§. 6.

Fachwerke, deren Momentenpunkte sämtlich innerhalb d. Auflägerverticalen liegen.

Für alle Theile tritt S_{\max} bei Vollbelastung ein. (§. 4, Regel 1)

Als Beispiel zur Berechnung diene der Polonceau'sche Dachstuhl.

Spannweite 10 m.; Höhe 2,5 m.; Binderweite 4 m.; Belastung pro 1 m.

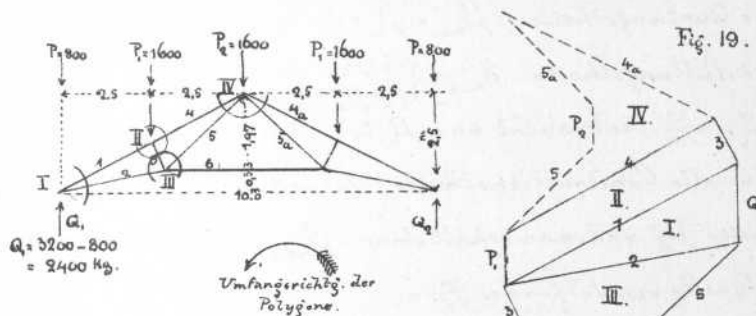
Grundfläche = 160 Kg.; gibt pro Knotenpunkt

$$P = 2,5 \cdot 4 \cdot 160 = 1600 \text{ Kg.}$$

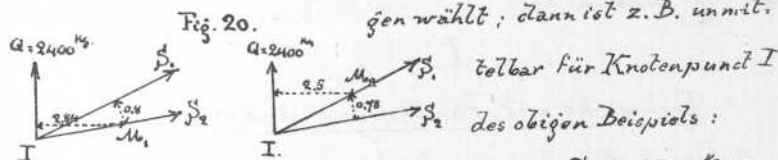
Die auf Knotenpunkt I. kommende Belastung P setzt man direct mit dem Auflägerdruck zusammen zu Q.

a. Die graphische Lösung geschieht nun mittelst Schnitten

um die einzelnen Knotenpunkte, wodurch man in den Kräfteplänen die Spannungen erhält:



b. Die Ritter'sche Methode führt alle Spannungen als Zug ein und gibt dann die Druckspannungen als negative Werthe. Die Größe der Spannungen erhält man dabei mittelst der Gleichgewichtsgleichungen für die in einem Knotenpunkte wirkenden Spannungen und Aussenkräfte, wobei man die Momentenpunkte je auf der Richtungslinie einer der unbekannten Spannungen wählt; dann ist z. B. unmittel-



telbar für Knotenpunkt I des obigen Beispiels:

$$S_1 \times 0,8 + 2400 \times 2,84 + S_2 \cdot 0 = 0 \quad \text{oder} \quad S_1 = -8520 \text{ kg (Druck)}$$

ebenso $2400 \times 2,5 + S_1 \cdot 0 - S_2 \times 0,78 = 0 \quad \text{oder} \quad S_2 = +7692 \text{ kg (Zug)}$

§. 7.

Berechnung von Fachwerken, bei welchen die Momentenpunkte der Gurtungstheile innerhalb, die der Füllungstheile außerhalb der Verticalen durch die Auflager liegen, unter Annahme einer gleichmäßig auf die Knotenpunkte vertheilten Eigenlast P und mobilen Last $K = nP$.

NB. Es werden sämtliche Aussenkräfte in den Knotenpunkten, in welchen die Fahrbahn angebracht ist, senkrecht

wirkend angenommen.

Bei allen derartigen Fachwerken hat man nach §. 4. für die Gurtungstheile $S_{\max} = S_a + S_b$ zu bestimmen,

für die Füllungstheile $S_{\max} = \begin{cases} S_b + S_c = S_a + S_b - S_a \\ S_a + S_d = S_a + S_b - S_c \end{cases}$

Da $S_b = n S_a$, so braucht nur S_a berechnet zu werden und zwar für alle Constructionstheile, ferner für die Füllungstheile S_c oder S_d und man erhält dann S_{\max} durch Berechnung einer Tabelle von folgender Form:

Gurtungen.

N ^o des Constr. Theils	S_a	$S_b = n S_a$	$S_{\max} = S_a + S_b$
-----------------------------------	-------	---------------	------------------------

Füllungstheile.

N ^o des Construct. Theils	Grenzspannungen.			
	S_a	$S_b = n S_a$	S_c	S_d
	S_a	$S_b = n S_a$	$S_c = S_b - S_a$	$S_d = S_b - S_a$
	$S_a + S_c$	$S_a + S_d$	$S_b + S_c = S_a + S_b - S_a$	$S_b + S_d = S_a + S_b - S_c$

Es werden in der Rubrik 4-7 die {oberen} Werthe eingeführt, wenn man {S_c} bestimmt hat.

I.

Fachwerke mit Parallelgurtungen.

1. Graph. Berechnung. Bestimmung von S_a .

Nachdem die Eigenlast pro Knotenpunkt und der aus dem Eigengewicht erhaltene Auflagerdruck bestimmt ist, führt man vom Auflager ausgehend nach §. 4. Absatz 2. Schnitte durch die Construction und reiht dann die nach §. 2 sich ergebenden Kräftepläne so aneinander, daß die Seiten des einen theilweise wieder als Seiten des folgenden Kräfteplanes fungiren, durch welches Verfahren die Construction der Kräftepläne kürzer u. genauer wird. — Zudem, bei gezeichneten Beispiel Fig. 21. stellt Fig. 22. den Kräfteplan für Fahrbahn oben, Fig. 23. den für Fahrbahn unten vor.

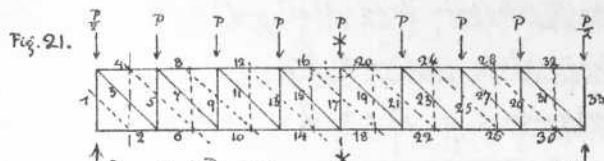
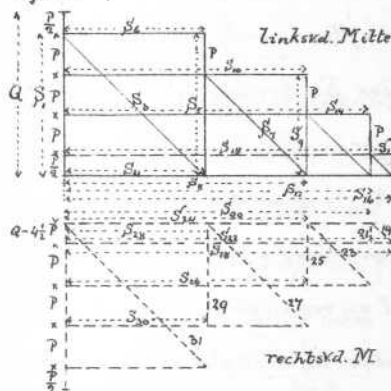


Fig. 22.



Belastung oben.

$$\left\{ \begin{array}{l} S_1 = 0 ; S_2 = Q - \frac{P}{2} \\ S_{31} = 0 ; S_{32} = \frac{P}{2} \end{array} \right\}$$

Man sieht, dass die Spannungen aller

Constructionstheile dieselben bleiben mit Ausnahme derjenigen der Verticalständer, welche bei Fahrbahn unten um P kleiner sind; liegt die Fahrbahn zwischen den Gurtungen, so sind die Spannungen in den Verticalständern { oberhalb } { unterhalb } der Fahrbahn nach Fig. 23 zu bestimmen. — Die Kräftepläne sind in 2 Theile, für die Knoten rechts und links von der Mitte getrennt.

Bestimmung von S_d . NB. Bei der Bestimmung von S_d oder S_e stellt man die Gleichgewichtsbedingungen nur für den unbelasteten Trägertheil auf und nimmt den Träger selbst als gewichtslos an.

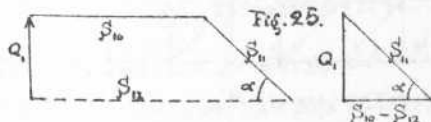
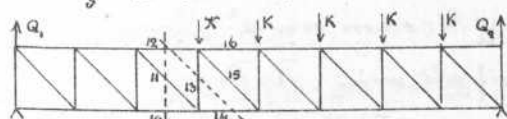
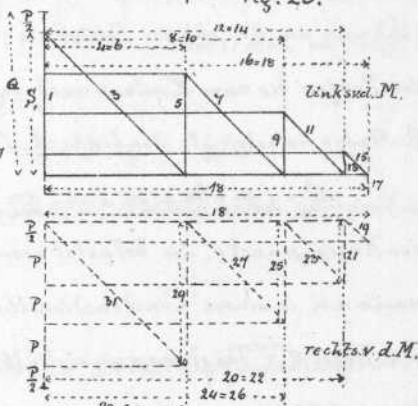
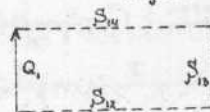


Fig. 23.



Belastung unten.

Fig. 26.




Stellt man eine Vertical =
projectionsgleichung für

$$(5.) \quad \begin{cases} S_a + S_d = -P \left\{ \frac{n+1}{2} - x \right\} - \frac{K}{2n} \{n-x+1\}(n-x) \\ S_a + S_c = -P \left\{ \frac{n+1}{2} - x \right\} + \frac{K}{2n} x \{x-1\} \end{cases}, \quad \text{für die Dia.}$$

gonalen dieselben Werte dividirt durch $\sin \alpha$ und mit entgegengesetztem Vorzeichen, und zwar haben diejenigen Diagonalen und Verticellen dasselbe Gleichungspaar, welche in einem unbelasteten Knotenpunkt zusammen kommen.

3. Graphische Darstellung der Werte von Glchg. (1)-(5).

Glchg. (1) stellt eine Parabel vor, deren Abscissen die Längen x a, deren Ordinaten die zugehörigen Werte von S sind; ihr Scheitel liegt in der Trägermitte und ihr Pfeil ist $\frac{n^2}{4}$, wenn der Maßstab der Darstellung $R \frac{a}{2h} = 1$ ist.

Die  schraffirten Theile der Fig. 32. versinnbildlichen den theoretischen Materialaufwand für die $\begin{cases} \text{obere} \\ \text{untere} \end{cases}$ Gurtung.

Glchg. (2.) ist die Gleichung einer Geraden, welche, wenn die $\begin{cases} \text{positiven} \\ \text{negativen} \end{cases}$ Werte von S_a in den zugehörigen Verticalständen als Ordinaten $\begin{cases} \text{abwärts} \\ \text{aufwärts} \end{cases}$ aufgetragen werden, die Lage I oder II annimmt, je nachdem die Fahrbahn oben oder unten angebracht ist. Ist der Maßstab für die Werte der Verticalspannungen $1 = p \text{ kg}$, so erhält man aus Fig. 33. die Werte für die Diagonalen bei jeder Lage der Fahrbahn durch Anwendung des Maßstabes $1 = \frac{p}{\sin \alpha} \text{ kg}$ auf die mit den betr. Nummern bezeichneten Werte; für die Diag. gehen die $\begin{cases} \text{positiven} \\ \text{negativen} \end{cases}$ Werte $\begin{cases} \text{aufwärts} \\ \text{abwärts} \end{cases}$.

Glchg. (3)-(4) sind die Gleichungen zweier Parabeln (Fig. 34), deren Scheitel, wenn die Werte ganz analog dem Verfahren für die Gl. (2.) aufgetragen werden, im $\begin{cases} \text{linken} \\ \text{rechten} \end{cases}$ Auflagerpunkt und eine Pachtlänge $\begin{cases} \text{rechts vom rechten} \\ \text{links v. linken} \end{cases}$ Auflagerpunkt liegen, wenn die Fahrbahn $\begin{cases} \text{oben} \\ \text{unten} \end{cases}$ ist.

Die Darstellung der Glchg. (5.) erhält man (Fig. 35.) durch

Fig. 31.

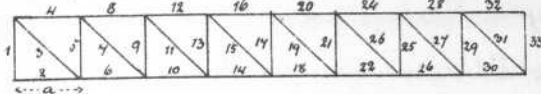


Fig. 32.

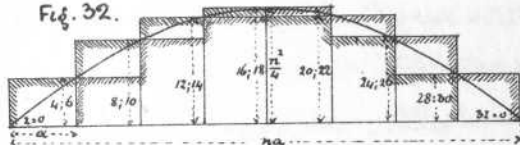


Fig. 33.

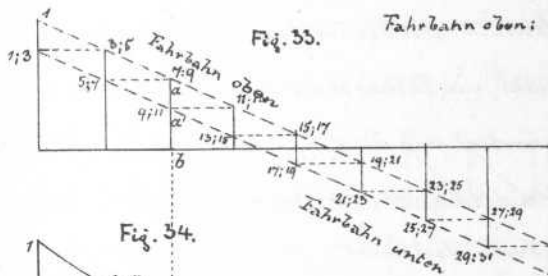


Fig. 34.

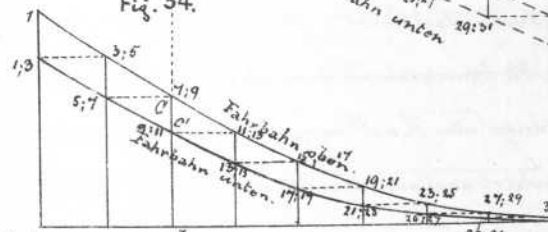
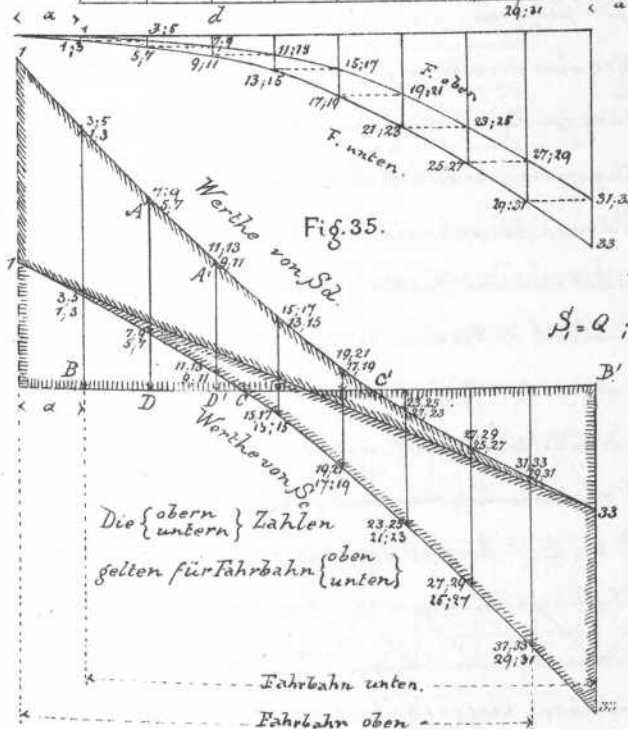


Fig. 35.



graphische Sum-
mirung der sich
auf Fahrbahn
unten beziehen =

$$S_1 = Q; S_{17} = \frac{P}{2}$$

$$S_{16} = \frac{P}{2 \sin \alpha}; S_{33} = \frac{P}{2}$$

Fahrbahn unten:

$$S_1 = Q - \frac{P}{2}; S_{13} = \frac{P}{2}$$

$$S_{15} = \frac{P}{2 \sin \alpha}; S_{33} = 0$$

Fahrbahn oben

$$S_1 = Q;$$

$$S_{33} = \frac{K}{2}$$

Fahrbahn unten

$$S_1 = Q - \frac{K}{2}; S_{33} = 0$$

Fahrbahn oben

$$S_1 = Q; S_{33} = \frac{P+K}{2}$$

Fahrbahn unten:

$$S_1 = Q - \frac{P+K}{2}$$

$$S_{33} = 0$$

den Ordinaten von Fig. 33 u. 34; die Werthe der Ständerspannungen finden sich dann für Fahrbahn unten in den entsprechenden Verticalen selbst, für Fahrbahn oben eine Fachlänge links davon, beide von der Horizontalen aus gemessen; z.B. S_d^I für q :

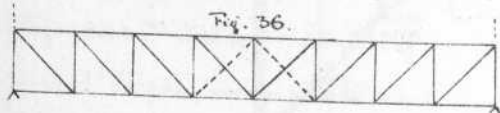
$$\text{Fahrb. unten} = a'b + c'd = AD'.$$

Fahrb. oben = $ab + cd = AD$. Die Spann. d. Diagon. sind für Fahrb. oben unten gleich. — Der bisherigen Betrachtung war ein Träger mit gerader Anzahl von Fächern zu Grunde gelegt; bei ungerader Anzahl der Fächer ändert sich die ganze Berechnung im wesentlichen nicht, nur werden die Figuren für graphische Darstellung etwas anders, was ein Versuch sofort lehrt.

Anmerk. Die Fig. 32 kann auch als graphische Darstellung der am Träger wirkenden Biegungs- oder Kraftmomente, die Fig. 38 als solche der „Scheerkräfte“ betrachtet werden. Das Nähere hierüber s. III Cap. bei der Theorie des Seilpolygons.

4. Einiges über die allgem. Anordnung der Parallelträger.

Bei Betrachtung der Fig. 35 sieht man, daß in den Verticalen, also auch in den Diagonalen zwischen B und C, C' und B' nur Zug oder nur Druck, in denen zwischen C und C' aber Zug u. Druck auftritt. Man ordnet nun die Träger gewöhnl. so an, daß in allen Diagonalen und allen Verticalen je nur einerlei Spannung auftritt; dies wird erreicht 1.) dadurch, daß man den Träger symmetrisch gegen die Mitte anordnet, wodurch die Spannungen zwischen C' und B' gleiches Zeichen und gleiche Größe erhalten wie zwischen B und C. 2.) dadurch, daß man in den Feldern



zwischen C und C', wo die Diagonalen Zug und

Druck aufzunehmen haben, Gegendiagonalen anordnet, welche

die ursprüngl. Druckspannung als Zugspannung übernehmen;
die Diagonalen werden bei Eisenconstructions so angenommen,
dass sie eine Druckspannung gar nicht aufnehmen können; bei
Holzconstructions ist das Prinzip umgekehrt.

Die Construction bleibt bei dieser Anordnung reines Fachwerk, während bei druckfähigen Diagonalen die Construction nicht mehr als solches betrachtet werden darf.

5. Weitere Systeme mit Parallelgurtungen.

Fig. 37.

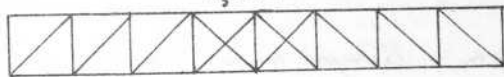


Fig. 38.

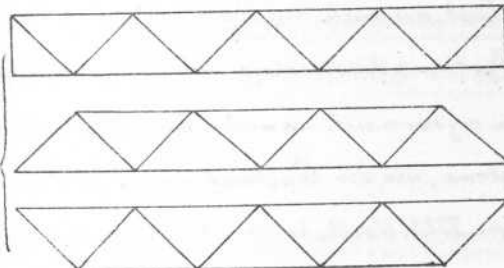
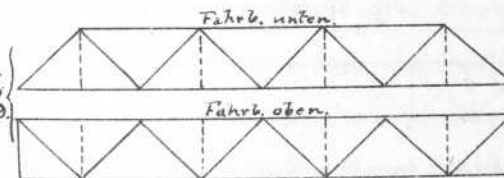


Fig. 39.

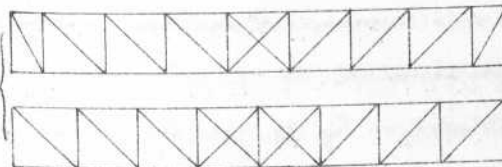


nicht als wesentliche Theile des Fachwerks auftreten, sondern nur zur Übertragung der äusseren Kräfte (Fahrbahn m. mobiler Last) auf die Knotenpunkte dienen.

Fig. 40.



Fig. 41.

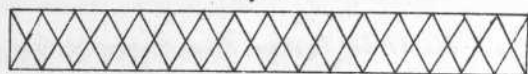


Das bisher betrachtete System heisst das „Mohr'sche“; weitere in ganz gleicher Weise zu berechnende Systeme sind das „Howe'sche“ Fig. 37. (für Holzconstr.) und d. „Neville'sche“ Fig. 38, von dem Fig. 39 nur Abarten sind, indem die Verticalständer

Bei dem System Mohr's ist der günstigste Neigungswinkel der Diagonalen $= 45^\circ$; bei dem System Neville $= 60^\circ$; um bei grossen Drücken

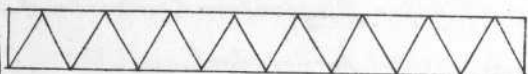
mit deren zunehmender Höhe keine zulängten Felder zu erhalten, wendet man sogenannte zusammengesetzte Fachwerke an. (Fig. 40-43). Dieselben werden so angeordnet, daß jedes der sie

Fig. 42.



bildenden Systeme ein vollständiges Fachwerk mit eigenen Knotenpunkten darstellt, in welche die Außen-

Fig. 43.



kräfte übertragen werden. — Es wird bei der Berechnung angenommen, daß die mob. Last wie auch die Eigenlast sich auf die Knotenpunkte beider Systeme gleichmäßig vertheilt; die Spannungen der Diagonalen ergeben sich unmittelbar aus der Berechnung der einzelnen Systeme, die der Gurtungen eines Feldes durch Summierung der an diesem Feld theilhabenden Gurtungsspannungen der Einzelsysteme. — Fig. 44. kann als doppeltes Neville-

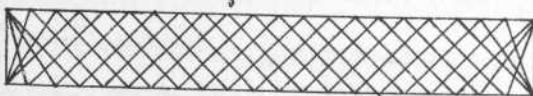
Fig. 44.



sches System dann betrachtet werden, wenn

die Vertikalbänder so schwach construiert sind, daß sie nur die Auslenkräfte von einem Knotenpunkt auf den andern übertragen können; es ist dann eine Combination der Fig. 39.

Fig. 45.



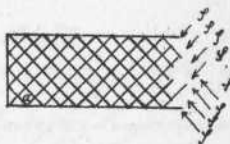
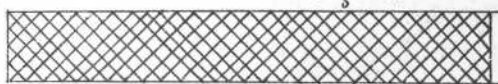
Bei sehr großen Spannweiten werden auch 3 und 4 fache

Systeme angewandt; man erhält dann eine Anordnung, die dem sog. weilmaschigen Gitterträger ähnlich ist. Fig. 45.

Die eigentlichen Gitterträger Fig. 46. nach der seither üblichen Anordnung können eigentlich als Fachwerke nicht berechnet

werden; es wird hier am besten die abscheuernde Verticalkraft V für eine Anzahl Querschnitte bestimmt und auf die Rittersä. gleichmäßig vertheilt, dann die Querschnitte derselben doch

Fig. 46.



nicht plötzlich wechseln lassen kann:

$$\sum S = \pm \frac{V}{\sin \alpha}$$

II.

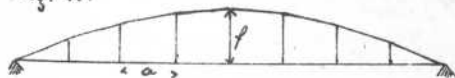
Fachwerke mit einer gebogenen Gurtung, die keinen Horizontalschub ausüben.

1.

Construction und Berechnung des parabolischen Trägers mit einer gebogenen u. einer geraden Gurtung.

Das zu dieser Trägerform führende Princip ist, daß alle Theile der geraden Gurtung eine gleich große Spannung aufnehmen sollen. — Setzt man in der allgemeinen Gleichung (1)

Fig. 47.



$$S = R \frac{a}{2h} (nx - x^2) \quad (\text{St. 65})$$

für das constante h ein variables y , so erhält man

$$(6_a) \quad 2S \cdot y = Ra(nx - x^2) \quad \text{und wenn}$$

$f = y_{\max}$ die Höhe in der Mitte des Trägers, wo

$$x = \frac{n}{2} : (6_b) \quad 2S \cdot f = R \cdot a \cdot \frac{n^2}{4} ; \quad \text{mit constantem } S \text{ ergibt}$$

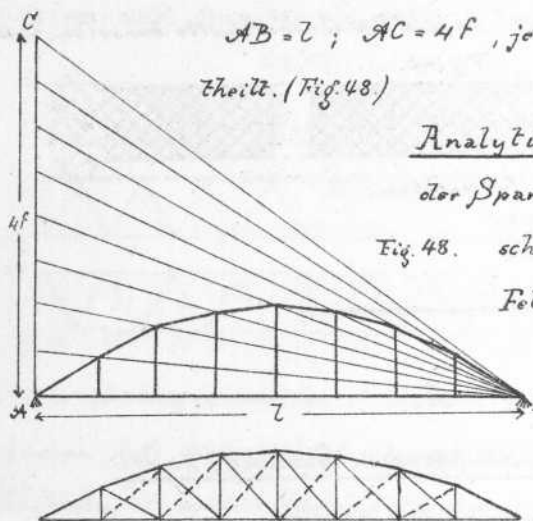
sich durch Division von Gl. (6_a) u. (6_b)

$$y = \frac{4f(nx - x^2)}{n^2} \quad \text{oder mit } l = na \text{ und } x_1 = xa$$

$$y = \frac{4f}{l^2} (lx_1 - x_1^2). \quad \text{Dies ist die Gleichung einer}$$

Parabel, deren Y -Achse vertical ist u. durch die Trägersmitte geht, und welche man durch folgende Construction erhält:

$AB = l$; $AC = 4f$, je in n gleiche Theile getheilt. (Fig. 48)



Analytische Bestimmung

der Spannungen für den parabolischen

Fig. 48. Träger bei gerader Felderanzahl n .

Für die Gurtungen tritt nach §. 4 Regel 1 bei Vollbelastung das Maximum von S ein.

Es ist für die untere Gurtung nach (6.)

$$(7.) S_a + S_b = \alpha \cdot \frac{R \cdot n^2}{8f};$$

für die obere Gurtung:

$$(8.) S_a + S_b = b \cdot \frac{R n^2}{8f}, \text{ wo } b \text{ die Länge des Constructionstheils ist, denn es ist } S_0 h_1 = S_u h \text{ oder } S_0 = S_u \frac{h}{h_1} = S_u \cdot \frac{b}{a}.$$

Anm. Ist r die über den Träger gleichmäßig vertheilte Totallast pro lf. m., so geht Gl. (7.) über in $S = r \cdot \frac{l^2}{8f}$. Es ist dies die Formel für den Horizontalzug oder -schub jedes gleichförmig belasteten Parabelbogens.

Für die Füllungstheile ist die durch das Eigengewicht hervorgerufene Spannung $S_a = 0$, was die Aufstellung von 2 Projectionsgleichungen oder die Construction eines Kräfteplans für einen Knotenpunkt der untern Gurtung sofort zeigt.

Nur die Verticalständer erhalten, wenn die Fahrbahn in der geraden Gurtung angebracht ist, eine Zugspannung gleich der im Knoten

tenpunkt angebrachten Eigenlast P , welche sie auf die gebogene Gurtung übertragen.

Die Maximal- = Spannungen der Füllungstheile findet man nach S. 4. Regel 2 u 5 (Fig. 50):

(9.) $\left\{ \begin{smallmatrix} S_a \\ S_c \end{smallmatrix} \right\} = \pm \frac{e}{a} \cdot Q = \pm \frac{e}{a} \cdot \frac{K}{n} \{1+2+3+\dots+x\}$, wo x die Anzahl der rechts, bzw. links. vom Schnitt belasteten Knotenpunkte.

Ist die Zahl der Felder ungerade $= 2n-1$, so tritt an Stelle von Gl. (7.)-(9.): $(7_a.) S_a + S_b = a R \frac{n(n-1)}{2h_{n-1}}$

(8_a.) $S_a + S_b = b R \frac{n(n-1)}{2h_{n-1}}$, wo h_{n-1} die Länge des der Mitte zunächst liegenden Verticalständers ist.

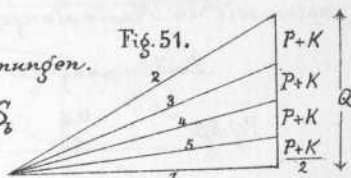
$$(9_a.) \left\{ \begin{smallmatrix} S_a \\ S_c \end{smallmatrix} \right\} = \pm \frac{e}{a} \cdot \frac{K}{2n-1} \{1+2+\dots+x\}$$

Man findet, daß alle Diagona-

len Druck und Zug aufnehmen haben und ordnet daher Gegen diagonalen an, da aus technischen Rücksichten nur zugfähige Diagonalen den zugleich druckfähigen vorzuziehen sind.

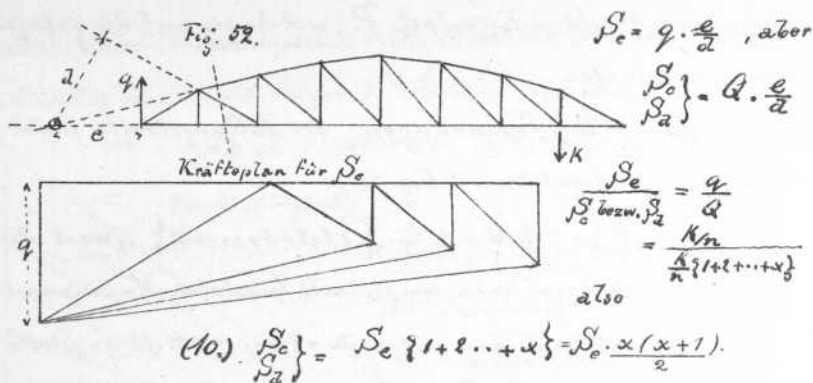
Graphische Bestimmung der Spannungen.

Für die Gurtungen findet sich $S_a + S_b$ aus einem Kräfteplan wie Fig. 52.

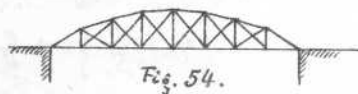


Die Grenzspannungen der Diagonalen findet man mit Hilfe eines Kräfteplans Fig. 53. Str 74., dem folgende Betrachtung zu Grunde liegt.

Es sei nur der erste Knotenpunkt neben dem rechten Auflager mit K belastet und der dadurch hervorgerufene Auflagerdruck sei q ; die durch diese Belastung in einem Füllungstheile erzeugte Spannung sei S_e , so ist:



Die Berechnung bleibt ganz dieselbe, ob der Träger nach Fig. 54 oder 55 angeordnet ist.

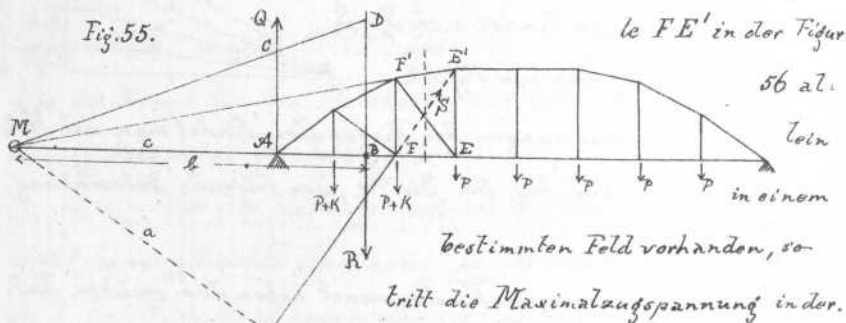


2.

Der Schweidler'sche Träger.

Das Princip dieser Trägerform ist, dass in allen Feldern, deren obere Gurtung zu dem gebogenen Theil der Gurtung gehört, keine Gegen diagonalen nöthig sein sollen, d.h. in etwa vorhandenen Gegendiagonalen soll die Maximalzugspannung = 0 sein.

Bestimmung der Gurtungsform. Ist die Gegendiagonale



selben nach S. 4. Regel 2. ein, wenn der Träger wie in der Figur belastet ist; dann gibt, wenn man jenes Feld durchschneidet und R die Resultante der Belastungen links ist, eine Mom. gleichung um

M für den belasteten Trägetheil

$$0 = S \cdot a + Q \cdot c - R \cdot b \quad ; \quad \text{da nun } S = 0 \text{ sein soll,}$$

so ist $R \cdot b = Q \cdot c$ oder

$$\frac{R}{Q} = \frac{c}{b}.$$

Macht man also auf der Richtungslinie von Q

$AC = R$ und auf der von R

$BD = Q$, so muß DC durch M gehen. Ist

nun BE' , d. h. die Höhe des der Mitte näher gelegenen Verticalständers in dem geschnittenen Felde bekannt, so ergibt sich, wenn man EM zieht, die Höhe FF' des dem Auflager näher liegenden Verticalständers.

Geht man von der Mitte aus unter Annahme einer bestimmten Höhe, die nach ausgeführten Beispielen gewählt wird, und construirt nach beiden Seiten die obere Gurtung symmetrisch, so erhält man Fig. 56.

Fig. 56.

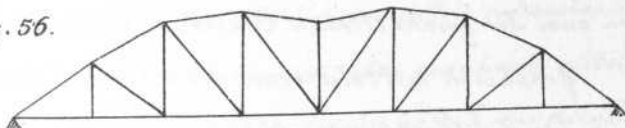
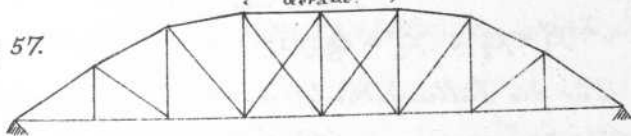


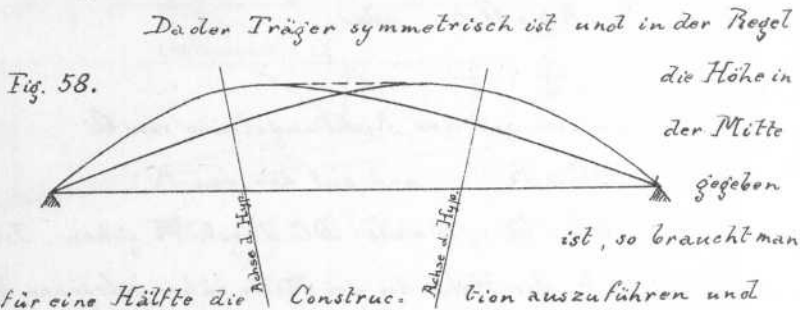
Fig. 57.



Bei dieser Anordnung wechseln die Spannungen der oberen Gurtung in der Mitte sehr rasch; auch ist die Ausführung des Trägers schwierig; man construirt daher den Träger nach Fig. 57, die man durch Ziehen einer Horiz. durch die höchsten Ecken erhält; indem Theil des Trägers mit parallelen Gurtungen sind auch Gegen diagonalen nöthig wie beim geraden Träger (Fig. 36)

Construirt man von den Auflagern ausgehend die oberen Gurtungen, wobei die Höhe des ersten Verticalstän-

ders angenommen wird, so erhält man die vollständigen Curven, welche Hyperbeln mit schiefer Achse sind, wie in Fig. 58.



zwar bei gegebener Höhe von dem Punkte ausgehend, für den

$$R > Q \text{ wird.}$$

(Der Genauigkeit der Construction wegen trägt man die Höhen in einem größeren Maßstab auf als die Längen.)

Die Berechnung des Trägers geschieht wieder mittelst Durchschneidung der Construction und Aufstellung von Momentengleichungen, wobei der Momentenpunkt je in den Schnitt von zwei der geschnittenen Constructionstheile gelegt wird; graphisch mittelst eines Kräfteplans für S_a , wodurch sich für die Gurtungen S_{\max} ergibt mit

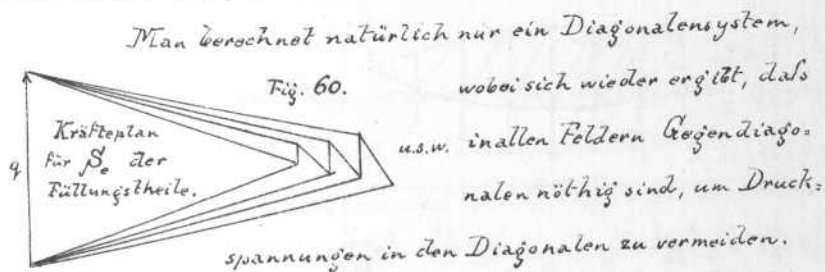
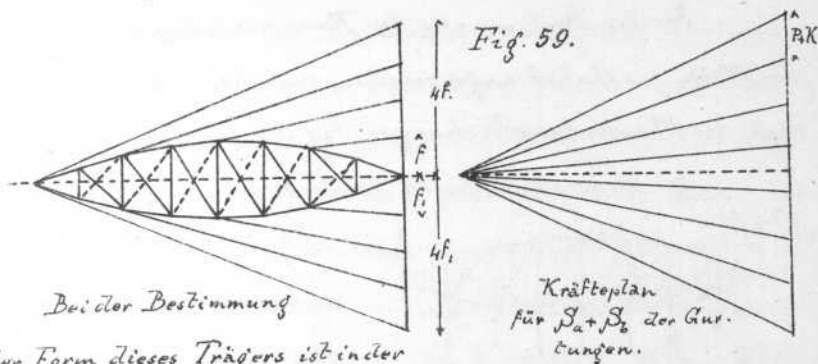
$$S_a + S'_a = S_a + \frac{K}{P} S_a.$$

Für die Füllungstheile wird wie bei den geraden Trägern S'_c , beziehungsweise S'_d bestimmt und erhält man S_{\max} mit $S_a + S'_c$, beziehungsweise $S'_a + S'_d$ (§ 4, Regel 2).

III.

Fachwerke mit zwei gebogenen Gurtungen, welche keinen Horizontalschub ausüben.

1. Der Fischbauchträger mit zwei gekögten parabolischen Gurtungen von gleicher oder verschiedener Pfeilhöhe.

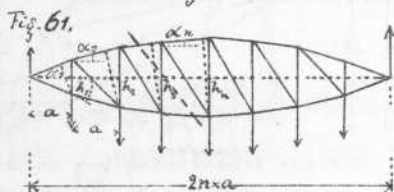


2. Der Pauli'sche Träger. Das Princip dieser Trägerform ist, daß die beiden symmetrischen Gurtungen durchgehend gleiche Spannungen erhalten sollen. In diesem Fall erleiden die

Füllungstheile auch bei totaler Belastung eine Spannung, welche jedoch nicht bedeutend ist.

Bei der Bestimmung der Form wird die Trägerhöhe in der Mitte gewöhnlich angenommen; man hat nun der Reihe nach die Momentengleichungen für die Gurtungsspannungen:

a. bei gerader Anzahl $2n$ der Felder: Fig. 61.



$$S_1 h_1 \cos \alpha_1 = M_0$$

$$S_2 h_2 \cos \alpha_2 = M_0$$

$$\dots$$

$$S_n h_n \cos \alpha_n = M_0$$

wobei M_0 das Moment der

im betrachteten Trägertheil wirkenden Außenkräfte ist; ferner

$$\text{ist} \quad \tan \alpha_1 = \frac{h_1}{2a} \quad ; \quad \tan \alpha_2 = \frac{h_2 - h_1}{2a} \quad \dots$$

$$\tan \alpha_n = \frac{h_n - h_{n-1}}{2a} \quad . \quad \text{Unbekannt sind nun}$$

$$S_1 = S_2 = \dots = S_n \quad ; \quad \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$$

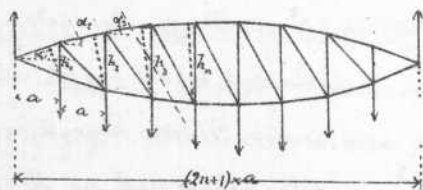
$$h_1, h_2, \dots, h_{n-1} \quad ; \quad \text{also } 1 + n + (n-1) = 2n \text{ Unbekannte}$$

be, welche mit obigen $2n$ Gleichungen gefunden werden können.

b. bei ungerader Anzahl $2n+1$ der Felder (Fig. 62)

erhält man statt obiger Gleichungen die folgenden:

Fig. 62.



$$S_1 h_1 \cos \alpha_1 = M_0$$

$$S_2 h_2 \cos \alpha_2 = M_0$$

$$\dots$$

$$S_n h_n \cos \alpha_n = M_0$$

ferner

$$\tan \alpha_1 = \frac{h_1}{2a}$$

$$\tan \alpha_2 = \frac{h_2 - h_1}{2a} \quad ; \quad \dots \quad ; \quad \tan \alpha_n = \frac{h_n - h_{n-1}}{2a}$$

$$\text{Unbekannt sind} \quad S_1 = S_2 = \dots = S_n$$

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$$

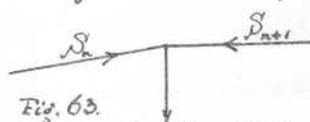
$$h_1, h_2, \dots, h_{n-1}$$

$$\text{also } 1 + n + n-1 = 2n$$

Unbekannte, welche aus den 2n Gleichungen gefunden werden können.

Bemerkungen. 1.) Bei der Bestimmung der Maximalspannungen sollte nach dem Pauli'schen Princip für alle Gurtungstheile eine Gleichung genügen; allein die Spannung in der unteren Gurtung ist nicht gleich der in der oberen, den durchschneidet man den Träger wie in Fig. 61 bezw. 62, so ist für die obere Gurtung $S_o h_3 \cos \alpha_3 = M_3$,
für die untere $S_u h_3 \cos \alpha_u = M_3$, also
nicht $S_o = S_u$.

2.) Bei ungerader Anzahl der Felder und bei gleichmäßig vertheilter Last ist im mittleren Feld die Spannung der Diagonale = 0, was die Verticalprojectionsgleichung für eine Trägerhälfte (Fig. 62) zeigt; es wirken



also in dem oberen Knotenpunkt noch drei Kräfte (Fig. 63.), von denen die verticale gleich der Verticalcomponente von S_n , die horizontale S_{n+1} gleich der Horizontalcomponente von S_n sein muß, es kann daher nicht S_{n+1} selbst gleich S_n sein. Ebenso läßt sich auch nachweisen, daß in der unteren Gurtung nicht $S_1 = S_2$ ist.

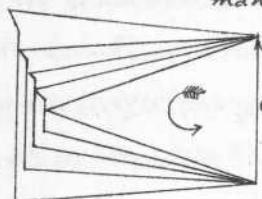
Diese zwei Resultate widersprechen dem Pauli'schen Princip und es kann dieses nicht vollkommen durchgeführt werden, wenn nicht die Diagonalen druckfähig und die Ständer nur zur Übertragung der Belastung angenommen werden. Die Grenzspannungen der Füllungstheile werden mittelst Projectionsgleichungen ganz in derselben Weise bestimmt wie bei dem geraden Träger (siehe Stk. 65), wobei aber die Wir-

kung der Eigenlast nicht außer Acht zu lassen ist.

Graphisch erhält man die Grenzspannungen, indem man einen Kräfteplan für S_a zeich-

Fig. 64.

u. s. w.

Kräfteplan
für S_a 

net, der die Form Fig. 64.

hat, und die S_{max} der Gur-
tungen rechnet aus

$$S'_a + S'_b = S_a \cdot \frac{P+K}{P};$$

die Wirkung der mobilen Last für die Füllungstheile kann man
wie beim Fischbauchträger mit Hilfe des Kräfteplanes für S_b be-
stimmen.

§. 8.

Bogenfachwerke, welche

einen Horizontalschub auf 2. Widerlager ausüben.

Allgemeines. Diese Constructionen, deren Form
nach den Fig. 65. oder ähnlich gewählt wird, bestehen aus
zwei einzelnen Fachwerken, welche sich gegenseitig stützen;

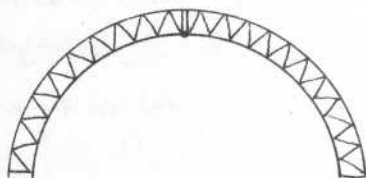
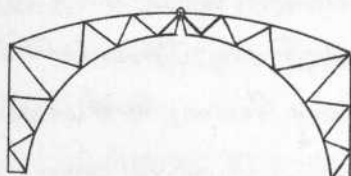
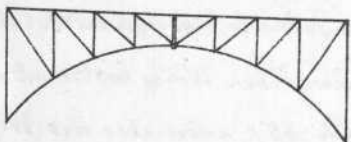
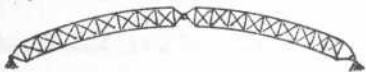
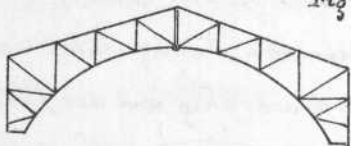


Fig. 65.



es sind sogen. Dreiecksträger.
träger. Die beiden Theile sind sym-
metrisch und die beiden Aufla-
ger liegen in einer Horizontalen.
Die polygonalen Gurtungen

worden in der Regel in Parabeln angeordnet, da in diesem Fall die Füllungstheile bei gleichmäßiger auf die Knotenpunkte vertheilter Belastung keine Spannungen erleiden und die Berechnung sich vereinfacht.

Anwendung finden derartige Träger als Dachbinder und Brückenträger.

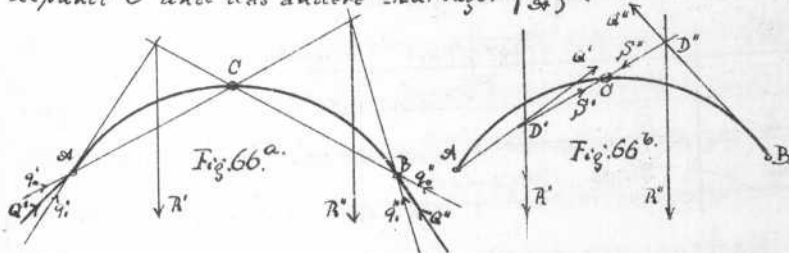
Die Berechnung dieser Träger kann nicht mehr nach den in §. 4. entwickelten Regeln ausgeführt werden, sondern es muß ein auf folgenden Sätzen basirendes Verfahren eingeschlagen werden:

1.) Sind mehrere Knotenpunkte belastet, so ist der Horizontalschub gleich der Summe der Horizontalschübe, welche durch die einzelnen Belastungen entstehen.

2.) Ebenso ist die Spannung eines Constructionstheils gleich der algebraischen Summe der Spannungen, welche durch die einzelnen Belastungen hervorgerufen werden.

3.) Hat eine Belastung constante Lage und Richtung, so ist die durch dieselbe in einem Constructionstheil hervorgerufene Spannung der Größe der Belastung proportional.

4.) Die Resultante des durch $\{B\}$ abgehenden Auflagerdrucks $\{q'_i\}$ mit der Belastung $\{R'_i\}$ ist gleich und entgegengesetzt dem andern Auflagerdruck $\{q''_i\}$ und geht durch den Scheitelpunkt C und das andere Auflager $\{B\}$.



Die Auflagerdrücke werden, nachdem alle Belastungen je einer Trägerhälfte zu R' , bezw. R'' zusammengesetzt sind, mit Hilfe von Satz 4. gefunden, indem man $q'_1; q'_0$ und $q''_1; q''_0$ und daraus Q' und Q'' construirt (Fig. 66^a).

Die Schnittpunkte D' und D'' derselben bezw. mit R' und R'' liegen mit dem Scheitel C in einer Geraden; die Resultanten S' und S'' sind einander gleich und entgegengesetzt (Fig. 66^b).

Drucklinie heisst das Seilpolygon, welches durch Zusammensetzung eines Auflagerdruckes mit den aufeinander folgenden Belastungen entsteht; sie muß nach dem Vorigen durch A, B und C gehen.

I.

Berechnung v. Bogenfachwerken

als Dachbinder dienen.

Die Berechnung dieser Träger unterscheidet sich von der der übrigen Dreiharnieträger dadurch, daß keine mobile Last in Rechnung zu ziehen ist; von derjenigen der gewöhnl. Fachwerkdachbinder aber dadurch, daß der Winddruck nicht mehr vertical, sondern in der Richtung der Projection der beobachteten natürlichen Richtung auf die Ebene des Binders in die Rechnung eingeführt wird.

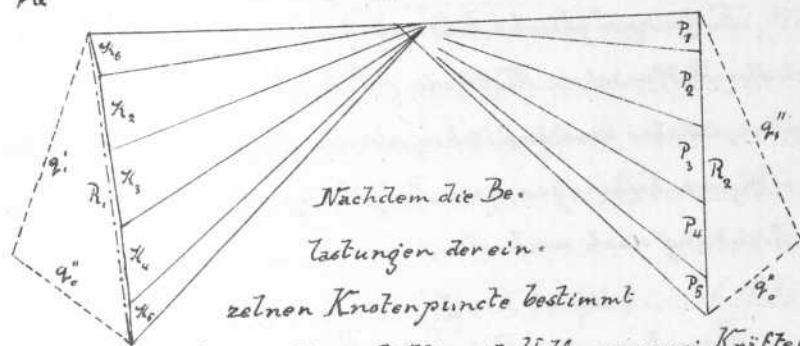
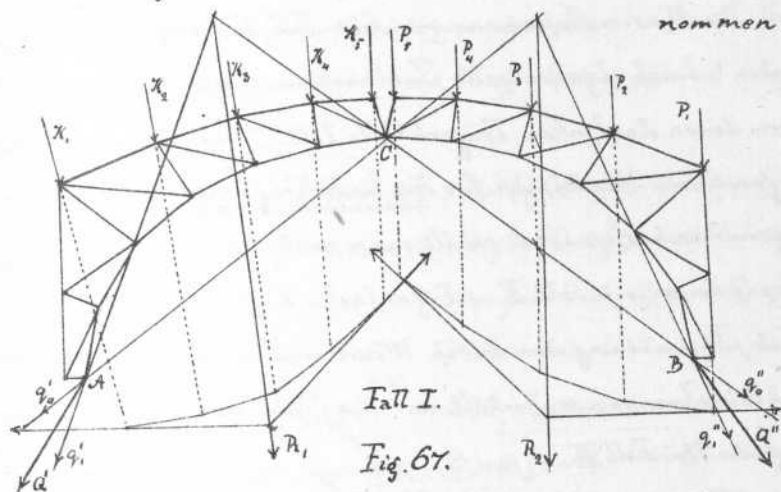
Um die Maximalspannungen zu ermitteln, sind drei verschiedene Belastungsfälle zu berechnen:

Fall.	Linker Trägertheil	Rechter Trägertheil.
I.	Wind; Schnee; Eigenlast	Schnee; Eigenlast.
II.	Schnee; Eigenlast	Schnee; Eigenlast.
III.	Wind; Eigenlast.	Eigenlast.

Natürlich wird der Winddruck nur auf eine Seite des

Daches wirkend angenommen und zwar übt er erfahrungsgemäß auf eine beliebige Fläche denselben ebenso aus, wie auf ihre Projection auf eine zur Windrichtung senkrecht stehende Ebene.

Einseitige Belastung durch Schnee wird nicht angenommen.



sind, werden für jede Trägerhälfte mit Hilfe von zwei Kräftepolygonen und zwei Seilpolygonen die Lagen der Resultanten R_1 und R_2 bestimmt, wodurch sich dann q'_0 ; q''_0 und q'_1 ; q''_1 und damit Q' und Q'' ergeben, deren Resultanten S mit R_1 und R_2 zur Probe durch den Scheitel C gehen und gleich groß sein müssen. - Nachdem nun Q' und Q'' bekannt sind, lassen sich die Spannungen nach der gewöhnlichen Weise (§. 6, St. 61) mittelst Kräfteplänen ermitteln, indem man im Punkt A , resp.

B beginnt; durch zweckmäßige Anordnung des Kräfteplans kann eine große Genauigkeit erzielt werden.

(s. Heft I. Blatt 5. der techn. Zeichn. des J.V.)

Ist Fall I. berechnet, so wird für eine Trägerhälfte ein Kräfteplan ganz in gleicher Weise für Fall II aufgestellt.

Die Maximalspannungen für Fall III. ergeben sich wie folgt: Durch algebraische Subtraction der Spannungen Fall II von denen der linken Trägerhälfte Fall I. erhält man die Spannungen durch Winddruck für die linke Trägerhälfte; die Spannungen durch Eigenlast erhält man nach Satz 3, Ste 81 eben: falls aus denen von Fall II (Eigenlast: Eigenlast u. Schnee) durch Summierung der durch Wind und Eigenlast hervorgerufenen Spannungen erhält man die Spannungen der linken Trägerhälfte Fall III.

Eine analytische Lösung kann natürlich auch hier nach der Ritter'schen Methode (S. 6. Ste 61) vorgenommen werden, ist aber umständlicher als die graphische, dabei die sen Trägern Fachlängen und Belastungen, letztere auch der Richtung nach wechseln.

II.

Berechnung v. Fachwerks-Bogenbrücken

mit gleichmäßig vertheilter mobil. Belastung.

Allgemeines. Bei diesen Trägern tritt auch für die Gurte theile S_{max} nicht mehr bei voller Totalbelastung, sondern bei Eigenlast und theilweiser Mobilbelastung ein.

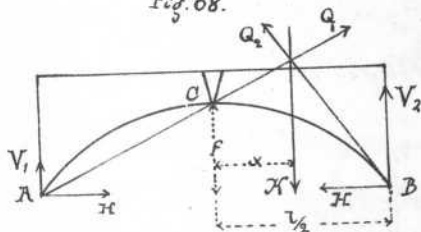
Um die Wirkung irgend einer Einzellast bestimmen zu können, muß erst der Auflagerdruck Q ermittelt werden, und um alsdann S_{max} zu bestimmen, muß diejenige Lage der Belas-

tungen ermittelt werden, welche dieses S_{\max} erzeugt; dies kann hier nicht mehr nach §. 4, Regel 1-5 geschehen, da die Auflagerdrücke nicht vertikal sind.

Bemerkg. Belastungsscheiden nennt man diejenigen verticalen Linien, welche den Träger so in zwei Theile zerlegen, daß eine Belastung links oder rechts von derselben in einem bestimmten Constructionstheil nur Zug oder nur Druck hervorbringt.

Ermittlung von V und H (s. Fig. 68.) Ist der Träger mit einer Einzellast K in einem beliebigen Knotenpunkt belastet,

Fig. 68.



so ergibt sich Q_1 und Q_2 durch Momentengleichungen um B und A, wobei, wenn A und B wie gewöhnlich in einer Horizontalen liegen, das Moment von $H=0$ wird und V_1 und V_2 sich unmittelbar aus den

Gleichungen ergeben und zwar ebenso groß, wie bei einem geraden frei aufliegenden Träger mit gleicher Spannweite und gleicher Belastung,

$$\frac{V_1}{V_2} = K \left\{ \frac{l}{2} \mp x \right\} ; \quad \frac{V_1}{V_2} = K \left\{ \frac{l}{2} \mp x \right\} \quad (11)$$

H findet man aus einer Momentengleichung um C:

$$0 = Q_1 \cdot \sigma - V_2 \frac{l}{2} + Hf + Kx ; \quad \text{woraus}$$

$$H = \frac{K \left\{ \frac{l}{2} - x \right\}}{2f} \quad (12) \quad \text{Es ist dabei}$$

gleichgültig, ob man für den linken oder rechten Trägertheil die Gleichgewichtsgleichung aufstellt. Die verschiedenen Werthe von H , welche sich ergeben, wenn man der Reihe nach je einen Knotenpunkt mit K belastet, kann man nach dem Folgenden leicht bestimmen.

Ist K die Belastung in der Entfernung x vom nächstliegenden Auflager, so ist nach Früherem (S. 81.) BC die Richtung von Q_2 , AD die von Q_1 , also ist, wenn A, E im Kräfteplan

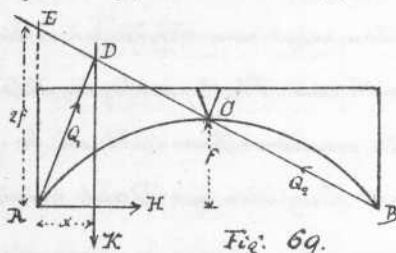


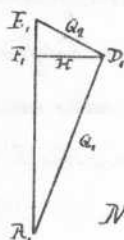
Fig. 69.

= K ist;

$$D, E, \parallel BC = Q_2,$$

$$A, D, \parallel AD = Q_1,$$

$$D, F, \text{horiz.} = H.$$



Nun ist

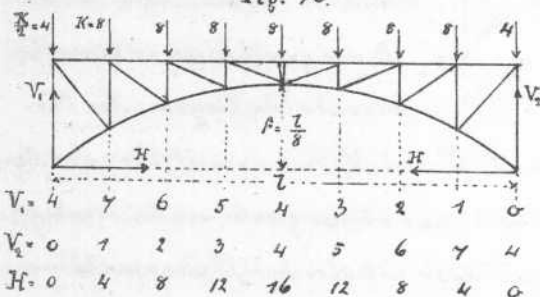
$\triangle ADE \sim \triangle D, E, H$, und $AE = 2f$, somit

$$\frac{H}{x} = \frac{K}{2f}, \text{ aber } \frac{K}{2f} \text{ ist constant, folglich } H$$

proportional zu x .

Besteht nun z.B. der Träger wie in Fig. 70 aus acht

Fig. 70.



gleichen Feldern, so ergibt sich mit $K=8$ für V und H das in der Figur angesetzte Schema, wobei die in der Verticalen eines

Knotenpunktes stehenden Zahlen die Werthe repräsentiren, welche einer Belastung dieses Knotenpunktes entsprechen.

Für eine beliebige Belastung ergeben sich V und H durch Summirung der betreffenden Zahlen, wobei aber nicht zu übersehen ist, daß, wenn die Größe der Belastung pro Knotenpunkt nicht mehr = K , sondern z. B. P ist, diese Zahlen noch mit $\frac{P}{K}$ zu multipliciren sind.

Bestimmung d. Belastungsscheiden.

1. für die Quertungen. Stellt man für einen beliebigen $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{oberen} \\ \text{unteren} \end{smallmatrix} \right\}$ Quertungstheil die Momentengleichung zur Br.

mittlung der durch eine Einzellast hervorgebrachten Spannung S auf, so sieht man sofort, daß S eine Druck- od. Zugspannung ist, je nachdem die Drucklinie AD , bezw. $\left. \begin{array}{l} \text{über od. unter} \\ \text{unter od. über} \end{array} \right\}$ dem Momentenpunkt M des betreffenden Constructionstheils liegt. Die

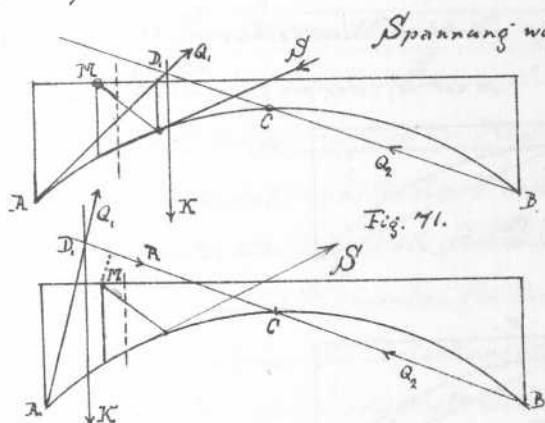


Fig. 71.

Spannung wird 0, wenn der Auflagerdruck im unbelasteten Trägereil durch M geht; diese Lage ist also Grenzlage.

Die Belastungsscheide ergibt sich also als

Verticale durch den Schnittpunkt D von AM und BC (Fig. 72.)

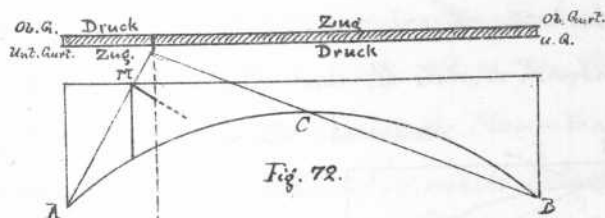


Fig. 72.

man hat nun für die Gurtungen folgende Regel I.

Oberer Gurt:	Belastg.	rechts v. d. Belastgsscheide	gibt	Zug
"	"	links "	"	Druck
Untere Gurt:	"	rechts "	"	Druck
"	"	links "	"	Zug.

2. für die Füllungstheile. Hier hat man zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem der Momentenpunkt zwischen E und F (Fig. 73.) oder außerhalb E und F liegt.

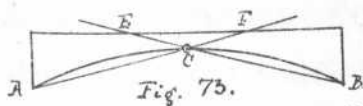


Fig. 73.

Im letzteren Fall ergibt die Betrachtung der Momentengleichungen die Belastungsscheide S , ganz wie bei den Gurtungen als Verticale durch den Schnittpunkt von AM und BC (Fig. 74.) Liegt aber M zwischen E und F , so ist für eine Belastung K

des Theils links vom Schnitt durch den betreffenden Füll-
lungstheil R in der Richtung EB die einzige am unbelas-
teten Trägersheil wirkende Kraft, es liegt also die Druckli-
nie unter M und S ergibt sich im vorliegenden Fall (Fig. 75)
als Druckspannung; wirkt K unmittelbar rechts vom Schnitt,

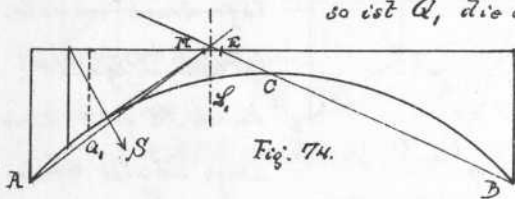


Fig. 74.

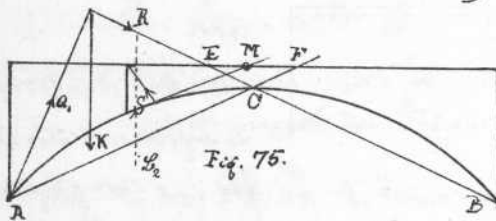


Fig. 75.

eine 1. Belastungsschoide L_2 .

Liegt nun aber K so, daß Q_1 durch M geht, so ist $S=0$,

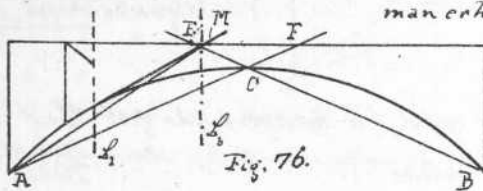


Fig. 76.

und BC .

man erhält also hier als eine 2^{te}

Belastungsschoide die
Verticale durch den
Schnittpunkt von AM

Regel II. Bezeichnet man die Belastungsschoiden für
Raum I (wo M links von E) mit L_1 ,

• II (wo M zwischen E und F) • L_2 und L_3

• III (wo M rechts von F) • L_1 , so erge-

ben sich Zugspannungen, wenn nach folgender Tabelle
belastet ist (in der linkseitigen Trägershälfte), die entgegen-
gesetzten Belastungen ergeben Druckspannungen.

	Raum	Belastungsscheide	Belastung.
Diagonalen	I	L_1	links
	II	L_2 und L_3	innen
	III	L_1	links
Verticalen	I	L_1	rechts
	II	L_2 und L_3	außen
	III	L_1	rechts

Analytische Bestimmung der Maximalspannungen.

Hat man nach Formel (11) und (12) die V und H für die einzelnen Belastungen ermittelt und ein Schema nach Fig. 70. aufgestellt, so wird mittelst Momentengleichungen zunächst \mathcal{P}_a berechnet; sodann werden die Belastungsscheiden für die einzelnen Constructionstheile ermittelt und die Druck- oder Zugmaxima für mobile Last bestimmt, indem man für die nach den oben angegebenen Regeln angebrachten Belastungen die V und H durch Summirung der betr. Werthe des Schemas berechnet und für die Spannungen selbst die Momentengleichungen aufstellt. — Man berechnet für mobile Belastung nur eines der zwei Spannungsmaxima \mathcal{P}_x (Zug) und \mathcal{P}_y (Druck) für jeden Constructionstheil und erhält dann das Minimum derselben oder das Maximum der entgegengesetzten Spannung aus $\mathcal{P}_y = \mathcal{P}_b - \mathcal{P}_x$; $\mathcal{P}_x = \mathcal{P}_b - \mathcal{P}_y$

Als resultierende Grenzspannungen erhält man

$$\text{Zugmaximum} = \mathcal{P}_a + \mathcal{P}_x = \mathcal{P}_a + \mathcal{P}_b - \mathcal{P}_y$$

$$\text{Druckmaximum} = \mathcal{P}_a + \mathcal{P}_y = \mathcal{P}_a + \mathcal{P}_b - \mathcal{P}_x ; \quad \mathcal{P}_b \text{ findet}$$

man, wenn im Schema die Werthe V und H für die Eigenlast

$$P \text{ berechnet sind, aus } \mathcal{P}_b = \frac{K}{P} \cdot \mathcal{P}_a$$

Graphische Bestimmung d. Maximalspannungen.

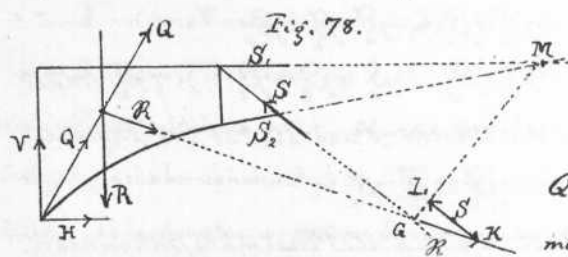
Während die analytische Behandlung nur bei Bogen mit con

stanter Fachlänge in möglichst einfachem Fachwerk sich empfiehlt, ist die graphische Methode bei Trägern von ganz beliebiger Construction anwendbar und insbesondere auch bei ungleichmäßig vertheilter Belastung (über letzteres s. das Kap. III.). Nachdem unter Annahme gleichmäßig vertheilter Belastung wie bei der analytischen Lösung V und H bestimmt und das Schema (Fig. 70) hierfür aufgestellt ist, wird S_a zunächst mittelst eines Kräfteplans ermittelt, der in ganz derselben Weise hergestellt wird wie bei den früher betrachteten Fachwerken.

Ist die gebogene Gurtung eine Parabel, so nimmt er die einfache Gestalt Fig. 77. an, woraus man sieht, daß alsdann

Fig. 77. wie beim Parabelträger die Spannungen der Füllungstheile = 0 sind und die Verticalbänder nur die Einzellast übertragen.

Die durch mobile Last erzeugten Spannungen werden wie folgt gefunden. Nachdem die Belastungsscheiden gezeichnet und die den Belastungen z. B. für Zugmaximum entsprechenden V und H aus dem Schema durch Summierung und Multiplication mit $\frac{K}{P}$ ermittelt sind, setzt man V und H zu Q zusammen (Fig. 78.), ermittelt die Lage und



Größe der Resultante R der Belastungen, und setzt Q mit R zu R zusammen; alsdann sind in

dem betrachteten Trägetheil die vier Kräfte R, S_1, S_2 u. S

Stehen AE und BF aber auf Strompfeilern, so werden die Zugstangen AD und BQ durch Fachwerksbalken ersetzt, welche gewöhnlich eine zu dem halben Träger der Mittelöffnung symmetrische Form erhalten; im Punkte H und J werden verankerte Zugstangen T_1 und T_2 angeordnet. Diese Anordnung nennt man eine versteifte Hängebrücke.

1. Nebenconstructions für eine einfache Hängebrücke.

Im Punkt A halten sich folgende Kräfte das Gleichgewicht: der Auflagerzug S des Bogenträgers, die Spannung Z der verankerten Zugstange und die Spannung V des Vertikalständers AE ; S ist bekannt, also bestimmen sich V und Z

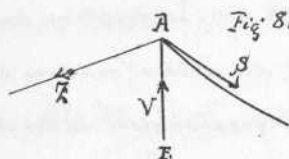
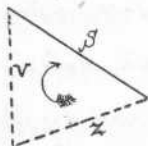


Fig. 81.



nach §. 2, 1.

Die Berechnung des Hängfachwerks selbst

geschieht wie die des Bogenfachwerks, S. 84 ff.

2. Nebenconstructions für eine versteifte Hängebrücke.

Man setzt hierbei voraus, daß der Seitenträger keinen Horizontalzug hervorbringt, was auch, da derselbe aus einem reinen Fachwerk besteht, vollkommen gerechtfertigt ist.

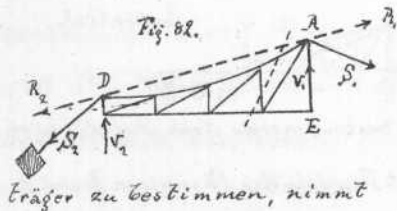
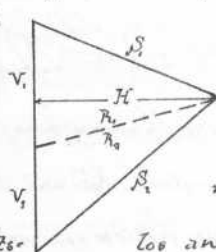


Fig. 82.

träger zu bestimmen, nimmt

nächst unbelastet und gewichtslos an demselben die Kräfte V_1, S_1 und V_2, S_2 , deren Mittelkräfte R_1 und R_2 gleich und entgegengesetzt gerichtet sind; die Richtung dieser Kräfte muß also AD sein. S_1 und die Richtung von R_1 u. V_1 sind bekannt, man kann also daraus V_1 und R_1 , und aus



Um die Wirkung des Hauptträgers auf den Seiten. man diesen zu.

los an; alsdann wir-

$R_1 = R_2$, und der Richtung von S_1 , V_2 und S_2 finden (Fig. 82).
Die Horizontalcomponente H von S_1 und S_2 schwankt zwischen den Grenzen

$$H_{\min} = \frac{p l^2}{8f}$$

$$H_{\max} = \frac{(p+k) l^2}{8f}, \text{ wo } p, k, l \text{ und } f \text{ sich auf die}$$

Hauptträger beziehen. (Sto 72, Anm.).

Sind S_1 , V_2 (R_1) und S_1 , V_1 (R_1) bekannt, so können für den Seitenträger die nur durch Maximal- und Minimalbelastung des Hauptträgers erzeugten Spannungen $S_{g \max}$ und $S_{g \min}$ berechnet werden, wobei

$$\frac{S_{g \min}}{S_{g \max}} = \frac{H_{\min}}{H_{\max}} = \frac{p}{p+k}$$

Analytische Berechnung.

für die Mittelöffnung s. Bogenträger Sto 84 ff.

für die Seitenöffnung unterscheidet sich die Berechnung von der eines gewöhnlichen Trägers dadurch, daß andere, nämlich die oben angegebenen Regeln für die Maximalbelastung zu befolgen sind.

Es muß berechnet werden die Wirkung von S_a , S_b , S_c und S_d ; $S_{g \min}$, $S_{g \max}$.

Ferner ist zu berücksichtigen, daß für einen Theil der Füllungsglieder der Momentenpunkt innerhalb, für einen andern außerhalb der Auflager liegt; je nach diesem tritt also S_{\max} ein durch $S_a + S_b$ oder durch $S_a + S_c$ bzw. $S_a + S_d$, wobei S_c bzw. S_d durch Belastungen links bzw. rechts vom Schnitt erzeugt werden.

Ist für die verschiedenen Fälle R_1 ; V_1 ; S_1 ; R_2 ; V_2 ; S_2 nach dem Obigem ermittelt, so finden sich die Spannungen

gen nach der üblichen Weise aus Momentengleichungen.

Die Grenzspannungen ergeben sich aus folg. Tabellen:

	Max. Zug.	Max Druck
Oberer Gurtung	$\beta_a + \beta_g \max$	$\beta_a' + \beta_b' + \beta_g \min$
Untere Gurtung	$\beta_a + \beta_b + \beta_g \min$	$\beta_a' + \beta_g \max$

Momentenpunkt			
	zw. V_1 u. V_2	zw. V_2 u. R_1	aufserhalb V_1 und R_1
Diagonaln.	Max Zug	$\beta_a + \beta_b + \beta_g \min$	$\beta_a' + \beta_b' + \beta_g \min$
	Max Druck	$\beta_a + \beta_g \max$	$\beta_a' + \beta_b' + \beta_g \max$
Vertic. Stdr.	Max Zug	$\beta_a + \beta_g \max$	$\beta_a' + \beta_b' + \beta_g \max$
	Max Druck	$\beta_a + \beta_b + \beta_g \min$	$\beta_a' + \beta_g \min$

Hierbei ist $\beta_c' = \beta_c \{1+2+3+\dots+x\}$

$\beta_a = \beta_b - \beta_c$ (s. Seite 54).

Graphische Lösung.

Für die Mittelöffnung s. Bogenträger Ste. 84 ff.

Für die Seitenöffnung wird konstruiert

1.) Ein Kräfteplan für β_a , wobei die Wirkung der Mittelöffnung = 0 gesetzt wird; hieraus findet man auch

$$\beta_b = \beta_a \cdot \frac{K}{P}$$

2.) Ein Kräfteplan für β_c , d.h. für den Fall, daß nur der erste Knotenpunkt neben einem Auflager belastet ist; hieraus ergibt sich (s. Ste. 74)

$$\beta_c' = \beta_c \{1+2+3+\dots+x\}$$

$$\beta_a = \beta_b - \beta_c' \quad \text{oder umgekehrt.}$$

3.) Ein Kräfteplan für $\beta_g \min$, nachdem, wie oben ausgeführt, $V_1; S_1; R_1; V_2; S_2; R_2$ ermittelt sind unter der Annahme, daß Eigenlast und mobile Last bei dem Seitenträger = 0 seien; hieraus erhält man (wie Ste 93)

$S_{g \max} = S_{g \min} \frac{p+k}{p}$. Die algebraische Summierung der Spannungen zu S_{\max} erfolgt wie beim analytischen Verfahren (s. ob. Tabellen S. 94.)

§. 9.

Vergleichung der Fachwerkträger.

Die Anwendung der verschiedenen Systeme ist ausser von localen Umständen abhängig von den allgemeinen Bedingungen des Verkehrs und den Herstellungskosten, welche sich nach der erforderlichen Materialmenge und der Schwierigkeit der Ausführung richten.

1. Gerader Fachwerkträger (Parallelträger). Aus praktischen Rücksichten müssen die Gurtungen am Auflager, zuweilen auch die Diagonalen in der Trägermitte stärker gemacht werden als die Theorie verlangt; dies verursacht jedoch bei kleinen Trägern weniger Kosten als eine Krümmung der Gurtungen erfordern würde.

Der Parallelträger von grosser Spannweite (40-60 m.) bietet einen Vortheil bei Bahn oben durch Ersparnis an den Mittelpfeilern, bei Bahn unten durch bequeme Anbringung von oberen Querverbindungen. — Bei grosser Trägerhöhe sind mehrfache Systeme den einfachen vorzuziehen.

Das Neville'sche System ist hauptsächlich bei Bahn oben zweckmässig, da hierbei an den Füllungstheilen bis zu 30% Material erspart werden kann gegen über dem Mohr'schen System, welches seinerseits bei Bahn unten eine einfachere Befestigung der Querträger gestattet.

2. Halbblinssen empfehlen sich bei Spannweiten

von 20-40 m. durch verhältnißmäßig geringen Materialaufwand; ein Nachtheil ist die Verschiedenheit der Knoten und die schwierige Herstellung der spitzen Endverbindung; beides ist beim Schwedler'schen Träger in geringerem Maße der Fall als beim Parabelträger, welcher letzterer auch etwas mehr Material erfordert.

Die umgekehrten Halblinsen (Fig. 83.) haben einen



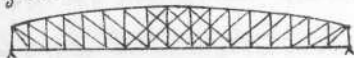
Fig. 83.

hohen Grad von Stabilität u. bedürfen, da die Bahn oben

liegt, nur eines geringen Abstands der Hauptträger und in Folge davon schmaler Pfeiler.

Bei den unvollständigen Halblinsen (nach Fig. 84) fällt

Fig. 84.



der spitze Winkel an den Auflä-

gern weg; sie eignen sich für größere Spannweiten von 50-60 m. an, wobei die vortheilhafteste Höhe gestattet, die oberen Querverbindungen über die ganze Länge beizubehalten.

3) Volllinsen. Es fehlt hier an einer Horizontalen zur Anbringung der Fahrbahn, weshalb viele Nebenconstructionen erforderlich sind, welche die Materialersparnisse des Systems wieder aufheben; außerdem sind die Knotenverbindungen sehr mannigfaltig und wird die Construction dadurch bedeutend erschwert. - Bei dem Pauli'schen Träger haben die Gurtungen durchaus denselben Querschnitt, können also ganz der Theorie entsprechend ausgeführt werden.

4) Bogenträger mit drei Charnieren. Die Spannungen im Bogen sind bei derselben Belastung so groß wie in der oberen Gurtung des Parabelträgers, also auch der Mate-

rialverbrauch derselbe; dagegen wird der Horizontalschub hier nicht von einer geraden Gurtung, sondern von den Pfeilern aufgenommen, was den Aufwand für den Träger selbst vermindert, für den Pfeiler aber unter gewöhnlichen Verhältnissen vermehrt.

§. 10.

Berechnung eiserner Fachwerks Pfeiler.

Es sollen hier nur solche Pfeiler in Betracht gezogen werden, welche sich nach der

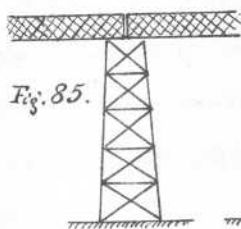


Fig. 85.

gen worden, welche sich nach der Längs- und Querrichtung der Brücke je in 2 symmetrische Fachwerke zerlegen lassen. Dies ist der Fall bei Pfeilern mit 4 Stützstellen

und dazwischen liegendem Dreiecksverband (Fig. 85); sämtliche Diagonalen sind hierbei nur zugfähig.

Die auf die Construction wirkenden Kräfte sind:

I. das Eigengew. d. Pfeilers und des auf ihm ruhenden Brückentheils,

II. die Verkehrsbelastung,

III. der Winddruck, seitliche Stöße der Fahrzeuge etc. (horizontale Kräfte).

I. Eigengewicht. Sämmtliche Kräfte ergeben sich am einfachsten durch einen Kräfteplan wie in Fig. 86; die Diagonalen werden wenn das Eigengewicht symmetrisch vertheilt ist, nicht in Anspruch genommen. — Die Spannung in 10 wird in Wirklichkeit = 0 werden, da der Unterbau des Pfeilers vermöge der Reibung auch einen schiefen Druck aufzu-

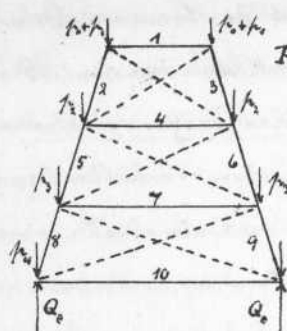


Fig. 86.

nehmen vermag.
 II. Verkehrsbelastung.
 a.) durch symmetrische Verkehrsbelastung werden nur die Ständer und die Horizontale 1 (u. 10) beansprucht und finden sich die betr.

Spannungen durch einen Kräfteplan

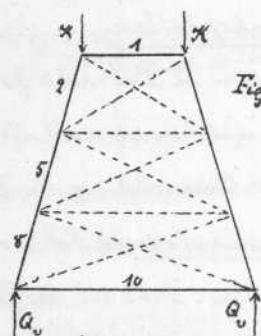


Fig. 87.

Fig. 87.

b.) bei einseitiger Belastung treten auch die Füllg. theile in Wirksamkeit und zwar nach dem Kräfteplan

Fig. 88.

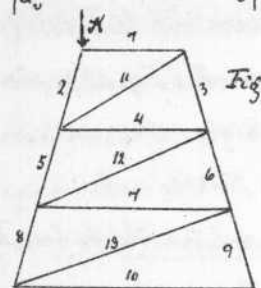


Fig. 88.

III. Horizontale Kräfte.

Dieselben werden am oberen Ende des Pfeilers concentrirt angenommen und bringen ebenfalls in allen Theilen Spannung

gen hervor, wie die



Fig. 89. zeigt. Die Spannung

10 lässt sich nicht bestimmen, da die Vertheilung des Horizontalschubs

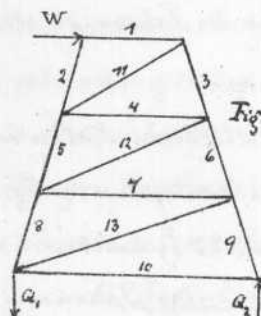
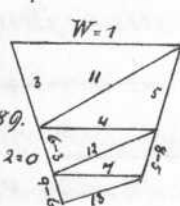


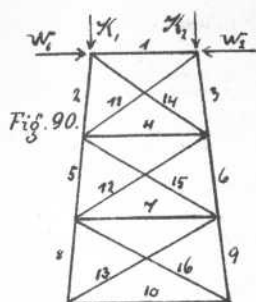
Fig. 89.



$H=W$ auf die beiden Auflagerpunkte nicht bekannt ist.

In folgender Tabelle bedeutet:

P das gesammte Eigengewicht der Brücke (p_0) und des Pfei-



lors ($p_1 + p_2 + \dots$), W das Maximum des Winddrucks etc., K die Verkehrslast

Tabelle für 2. Belastungsweise.

Bemerkung.

Für die Quertachwerke tritt das Maximum von W ein, wenn sich eine

	$\begin{cases} 2; 5; 8; \dots \\ 3; 6; 9; \dots \end{cases}$	1	4; 7	10	$\begin{cases} 11; 12; 13; \dots \\ 14; 15; 16; \dots \end{cases}$
Max. Zug (Min. Druck)	$P \begin{cases} W_1 \\ W_2 \end{cases}$	P	P	$PK_1 K_2$	$P \begin{cases} K_1 W_1 \\ K_2 W_2 \end{cases}$
Max. Druck (Min. Zug.)	$PK_1 K_2 \begin{cases} W_1 \\ W_2 \end{cases}$	$PK_1 K_2 W_1 \text{ od. } W_2$	$PK_1 \text{ od. } K_2$	P	0

Vorkehrslast auf der Brücke befindet; ist nun W der Winddruck, welchen die Fahrzeuge aufnehmen und K_{\min} das kleinste Gewicht derselben, so kann in 2; 5; ... der durch W entstehende Zug $\begin{cases} \text{kleiner} \\ \text{größer} \end{cases}$ sein als der durch K_{\min} entstehende Druck.

Ist dies der Fall, so ist statt W bei * in obiger Tabelle $\begin{cases} W - W_0 \\ K_{\min} W \end{cases}$ zu setzen.

Bei zweispuriger Bahn ist K_{\min} auf dem windabwärts gelegenen Geleise anzunehmen.

Handwritten text at the top of the page, possibly a title or introductory paragraph.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Handwritten text in the middle section of the page, continuing the narrative or report.

Handwritten text at the bottom of the page, possibly a conclusion or signature area.

TECHN. MECHANIK.

III. Kapitel.

Theorie
des

ERDDRUCKS

und

Berechnung von Futtermauern.

Herausgegeben
vom Ingenieur-Verein.
Polytechnikum Stuttgart.

1875.

TECHN. MECHANIK.

II. Kapitel

Theorie

ERDRUCKS

Erklärung von Erdbeben

Erklärung

von Erdbeben

Erklärung

1872

Theorie des Erddrucks

mit Anwendung auf die Bestimmung der
Stärke von Futtermauern.

Bezeichnungen.

- c Cohesion pro \square Einheit
 f Reibungscoefficient
 g Gewicht von 1 kb^m Erde (in §§ 1-18 = d. Gewichts-^{-einheit})
 g' Gewicht von 1 kb^m Mauerwerk.
 k Stabilitätscoefficient
 n Normalpressung (= Spannung), d.h. Normal-
druck pro \square Einheit.
 s Schubspannung, d.h. Schubkraft p. \square Einheit.
 β Winkel der Druckrichtung eines Flächenelemen-
tes mit seiner Normalen (bis S. 13.)
 φ Natürlicher Böschungswinkel = Reibungswinkel
von Erde auf Erde.
 φ' Reibungswinkel zwischen Erde u. Mauerfläche.
-

I.

Theorie des Erddrucks.

A.

Neuere Theorie von Considère, Winkler und
Levi, graphisch behandelt von Mohr.

§. 1.

Jedes Theilchen eines Erdkörpers setzt der Störung
seines Gleichgewichts zwei Widerstände entgegen:

1. seine Cohäsion = C pro \square Einheit,
2. seine Reibung = $f \cdot n$ pro \square Einheit.

Erfahrungsmäßig ist nemlich die Reibung proportional dem
Normaldruck: folglich

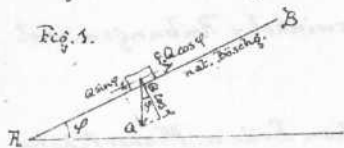
Gesamtwiderstand eines Erdtheilchens von der Fläche F

$$W = F \cdot C + F \cdot n f = F \{ C + n f \}$$

Bemerkung: C wird im Folgenden immer = 0 ge-
setzt, da es gewöhnlich, besonders bei lose aufgeschütteter Erde
gegen $n \cdot f$ sehr klein ist.

§. 2.

Die Oberfläche lose aufgeschütteter Erde bildet
in Folge der Reibung mit der Horizontalen einen Winkel φ



(Fig. 1.), welcher „natürlicher Bö-
schungswinkel“ heißt.

Befindet sich ein Erdtheilchen

vom Gewichte Q auf der natürl. Böschung AB , so wirkt längs AB die Componente $Q \cdot \sin \varphi$, normal zu AB die Componente $Q \cdot \cos \varphi$; da Gleichgewicht stattfindet, so muß sein

$$Q \cdot \sin \varphi = f \cdot Q \cos \varphi$$

$f = \operatorname{tg} \varphi$, d. h. der Reibungscoefficient ist gleich der tg . des natürl. Böschungswinkels.

Tabelle I.

Angeschüttete Erdaart	Nat. Böschungswinkel φ	Gewicht pro Km.
Feiner Sand	$31^\circ - 33^\circ$	1400 kg.
Feuchter "	$33^\circ - 36^\circ$	1600 "
Fette Erde	$36^\circ - 42^\circ$	1600-1700 "
Felstrümmer	$40^\circ - 45^\circ$	1500-2000 "
Maxima	54°	2500 "
Lehm u. Sand, m. Wasser durch- zogen	$15^\circ - 20^\circ$	1800 "

Tabelle II.

Böschung.	tg . d. Böschgswkls.	Böschgswinkel.
1 fache Böschg.	1 : 1	$45^\circ 0'$
$1\frac{1}{4}$ " "	1 : $1\frac{1}{4}$	$38^\circ 40'$
$1\frac{1}{2}$ " "	1 : $1\frac{1}{2}$	$33^\circ 41'$
2 " "	1 : 2	$26^\circ 34'$

§. 3.

Unter der Voraussetzung, daß die Erdmasse vollständig homogen, ihre Oberfläche unbegrenzt und $c = 0$ ist, ergeben sich folgende Sätze:

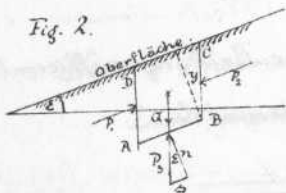
1.) In einer Ebene parallel zur Oberfläche befinden sich alle Erdtheilchen unter demselben Druck.

2.) Jedes Flächenelement parallel zur Oberfläche

hat einen verticalen Druck und jedes verticale Flächenelement einen zur Oberfläche parallelen Druck aufzunehmen und zwar (Fig. 2.) ist

$$P_1 = P_2 \text{ und } P_3 = Q \text{ (Gewicht von } ABCD \text{).}$$

Fig. 2.



$Q = \text{Fläche } ABCD \times g$ oder wenn g die Gewichtseinheit.

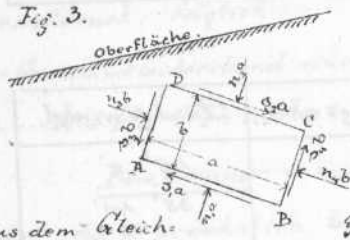
$Q = AB \times y$; demnach ist die verti-

cale Pressung in einem beliebigen Flächenelement parallel zur Oberfläche gemessen durch seinen Abstand y von der Oberfläche. P_3 ist die Resultante aus der Normal- und Schubkomponente; wobei Normalspannung $n = y \cdot \cos \epsilon$.

Schubspannung $s = y \cdot \sin \epsilon$.

3.) Die Schubspannungen von je zwei zu einander senkrechten Flächenelementen sind einander gleich, denn (Fig. 3.):

Fig. 3.



Wird das Gewicht $a \cdot b$ des

Körperelementes $ABCD$ als ein unendlich kleines 2^{ter} Ordnung vernachlässigt, so ist unmittelbar

aus dem Gleichgewichtszustande ersichtlich, dass

$$1.) \left\{ \begin{array}{l} n_1 = n_2 \\ n_3 = n_4 \end{array} \right.$$

$$2.) \left\{ \begin{array}{l} s_1 = s_2 \\ s_3 = s_4 \end{array} \right. ; \text{ dann ist aber}$$

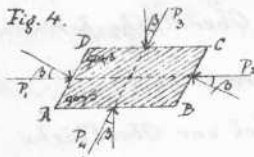
auch Resultante

von s_2a und s_4b = Resultante von s_1a und s_3b in der Richtung AC und aus den Momentengleichungen um C und A

$$s_1 = s_3 ; s_2 = s_4$$

4.) Zwei Richtungen heißen gepaart oder conjugirt, wenn je die Spannung in den

Fig. 4.



Flächen der einen Richtung parallel ist der anderen Richtung. (Fig. 4.)

$\beta = \varphi$ wird und bei Überschreitung der Gleichgewichtsgrenze Bewegung eintritt; man nennt deshalb jene Flächen Gleitflächen.

4.) Unmittelbar aus der Figur ersichtlich ist, daß die Richtungen von n_{\max} und n_{\min} , sowie der Gleitflächen nur von ε , nicht aber von γ abhängig, also in einem Erzkörper überall gleich gerichtet sind; die Gleitflächen sind daher Ebenen.

§. 8.

Berechnung der für die Grenzzustände (§. 7, 1 u. 2.) charakteristischen Größen.

Bezeichnet man mit $\{n_i\}$ die Normalpressungen für den $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{unteren} \\ \text{oberen} \end{smallmatrix} \right\}$ Grenzzustand, so ist nach §. 6, 2

$$\text{für d. unt. Grenzzustand: } \sin \beta_{\max} = \sin \varphi = \frac{n_{\max} - n_{\min}}{n_{\max} + n_{\min}}$$

$$\text{für d. ob. Grenzzustand: } \sin \beta_{\max} = \sin \varphi = \frac{n_{\max} - n_{\min}}{n_{\max} + n_{\min}}$$

$$\text{hieraus } \frac{n_{\min}}{n_{\max}} = \frac{n_{\min}}{n_{\max}} = \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} = \tan^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right)$$

d. h. $\frac{n_{\min}}{n_{\max}}$ hat für beide Grenzzustände denselben nur von φ abhängigen Werth und zwar

bei $\varphi = 0$	10°	20°	30°	35°	40°	45°	50°
$\frac{n_{\min}}{n_{\max}} = 1$	0,704	0,490	0,333	0,271	0,217	0,171	0,132 = $\tan^2(45^\circ - \frac{\varphi}{2})$

ferner läßt sich beweisen:

$$\left. \begin{matrix} n_{\min} \\ n_{\min} \end{matrix} \right\} = \gamma \frac{\cos \varepsilon \pm \sqrt{\cos^2 \varepsilon - \cos^2 \varphi}}{1 + \sin \varphi}$$

$$\left. \begin{matrix} n_{\max} \\ n_{\max} \end{matrix} \right\} = \gamma \frac{\cos \varepsilon \pm \sqrt{\cos^2 \varepsilon - \cos^2 \varphi}}{1 - \sin \varphi}$$

$$n_{\max} \cdot n_{\min} = n_{\min} \cdot n_{\max} = \gamma^2.$$

§. 9.

Anwendung der in §. 7. und 8. entwickelten Beziehungen auf besondere Fälle.

1.) Oberfläche des Erdkörpers horizontal, $\varepsilon = 0$.

Die 3 Punkte E, F und J fallen in J zusammen; die Darstellung

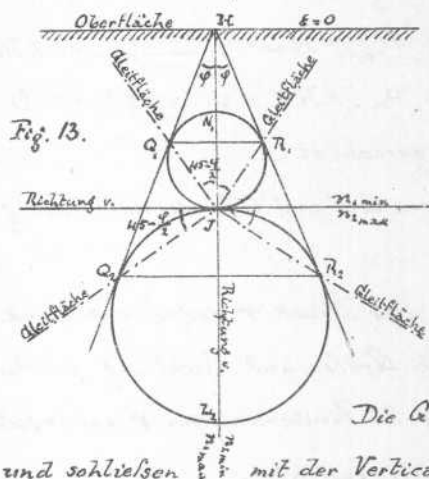


Fig. 13.

des Gleichgewichtszustandes gibt Fig. 13.

a.) im unteren Grenzzustand

ist $n_{\max} = HJ = y$ vertical,

$n_{\min} = HN$, horizontal ge-

richtet und nach §. 8.

$$= y \lg^2(45^\circ - \frac{\varphi}{2}).$$

Die Gleitflächen sind JQ, und JR,

und schließen mit der Verticalen den $\angle 45^\circ - \frac{\varphi}{2}$ ein.

b.) im oberen Grenzzustand ist

$n_{\min} = HJ = y$ vertical und

$n_{\max} = HL_2 = \frac{y}{\lg^2(45^\circ - \frac{\varphi}{2})}$ horizontal gerichtet. Die Gleitflächen sind JQ₂ und JR₂ und machen mit der Horizontalen den $\angle 45^\circ - \frac{\varphi}{2}$.

c.) Beim Übergang vom unteren in den oberen Grenzzustand wird der das Gleichgewicht darstellende Kreis immer kleiner, bis er in J zu einem Punkt zusammenschrumpft; in diesem Zustand ist $n_{\max} = n_{\min} = y$; die Richtungen sind unbestimmt, der Druck ist ein rein hydrostatischer, d.h. die Erde würde sich hier wie eine vollkommene Flüssigkeit verhalten.

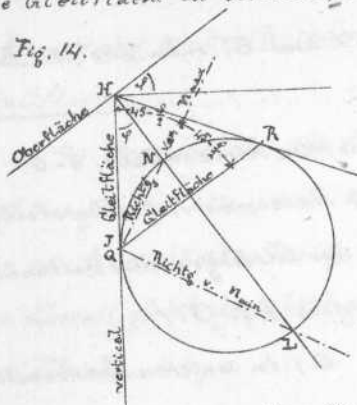
2.) Oberfläche der Erdmasse = natürl. Böschung,

$\varepsilon = \varphi$.

Es fallen die Punkte Q mit J zusammen; die

eine Gleitfläche ist vertical, die andere parallel zur Oberfläche.

Fig. 14.



Beide Grenzzustände (§. 4.)
fallen in einen zusammen; nur
ein Gleichgewichtszustand ist
möglich.

$$r_{\max} = HL = y \cdot \frac{1 + \sin \varphi}{\cos \varphi}, \text{ nach } JN$$

$$r_{\min} = HN = y \cdot \frac{1 - \sin \varphi}{\cos \varphi}, \text{ n. } JL$$

gerichtet.

Der Druck gegen die Gleitflächen QH und $QR = y$ mit Richtung
nach QR resp. QH .

Practisch ausgedrückt: der Druck r gegen die Wand.
Fläche AB ist nach Größe und Richtung vollstän-
dig bestimmt; jede Änderung an r verursacht
Störung des Gleichgewichts.

§. 10.

Lage des Angriffspunktes des Mitteldrucks
gegen eine endliche ebene Fläche.

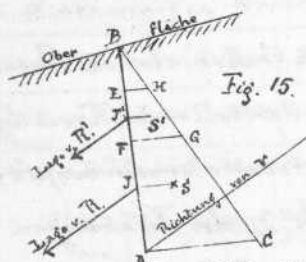


Fig. 15.

Es ist leicht ersichtlich, daß für die
selbe Richtung eines Flächenelements
in einem Brätkörper auch alle das
Gleichgewicht darstellende Figuren
einander ähnlich sind; d.h. die Drü-

cke gegen parallele Elemente resp. gegen eine ebene Fläche
 AB sind parallel. - Die Größe der Drücke ist allein von
der Lage dieser Elemente, d.h. von y abhängig. Man erhält
somit den Druck auf die Fläche AB als Summe aller ein-
zelnen Drücke; da diese proportional y , so ist diese Sum-

me dargestellt durch den Flächeninhalt des $\triangle ABC$, wo AC Größe der Pressung in A ist. — Der Schwerpunkt des $\triangle ABC$ senkrecht auf AB , d.h. AC nach J übertragen gibt die Lage der Druckresultante R und eine Parallele mit der Richtung des Drucks in A die Richtung von R .

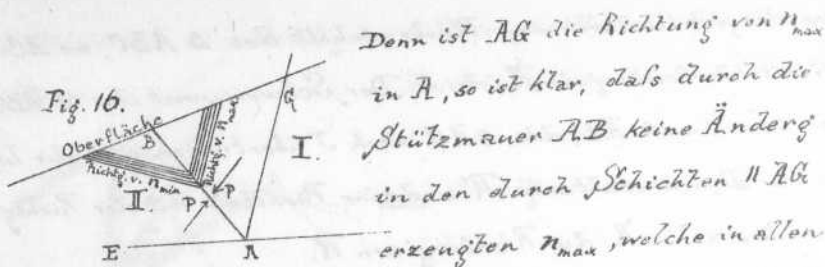
Ebenso findet man den Druck auf die begrenzte Ebene EF = Fläche $EFCH$ mit Angriffspunkt in J' (projicirter Schwerpunkt S') ; für AB liegt J $\frac{1}{3} AB$ von A entfernt.

§. 11.

Anwendbarkeit der Theorie auf die Bestimmung des Erddrucks gegen feste ebene Wandflächen.

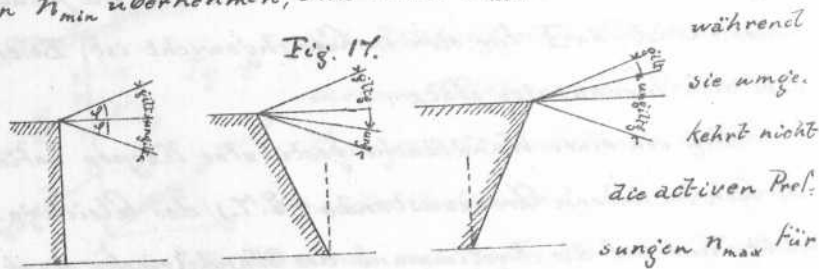
Im unbegrenzten Erdkörper ist in Bezug auf eine Trennungsebene AB (Fig. 16.) der Druck des Erdkörpers I gleich dem von $II = P$. Würde AB durch eine Stützmauer ersetzt werden und wäre hierbei $\angle EAB = \varphi$, so ist klar, daß der Druck von I auf die Wandfläche der Stützmauer $AB = P$, aber der Druck von II auf die Stützmauer $= 0$ ist, da II für sich im Gleichgewicht ist. Es ergibt sich hieraus der Satz:

Ein von einer Wandfläche gestützter Körper befindet sich im untern Grenzzustande (§. 7.) des Gleichgewichts und auf die Bestimmung des Wanddrucks darf die Theorie für unbegrenzte Erdkörper nur angewendet werden, wenn die Gerade, welche die Richtung von n_{\max} im Fußpunkt angibt, innerhalb des gestützten Erdkörpers liegt.



Denn ist AG die Richtung von n_{\max} in A , so ist klar, daß durch die Stützmauer AB keine Änderung in den durch Schichten II AG erzeugten n_{\max} , welche in allen Punkten der AB auftreten, erfolgt, dagegen wird die Erzeugung der n_{\min} durch die Entfernung von I und Ersetzung durch eine Stützmauer gestört, weil die Parallelschichten, deren hydrostatischer Druck n_{\min} erzeugt, im beseitigten Körper liegen. $\frac{n_{\min}}{n_{\max}}$ aber ist nach §. 8 abhängig von der Reibung φ und zwar je größer φ , desto kleiner kann n_{\min} im Verhältniß zu n_{\max} sein, um eine Bewegung der Erdtheilchen noch zu verhindern. Die Pressungen n_{\min} und die Reibungswiderstände erzeugen einander, können daher als passive Widerstände aufgefaßt werden, welche der Wirkung der activen Pressungen n_{\max} das Gleichgewicht halten.

Also: Die Stützmauer kann die Stelle der passiven n_{\min} übernehmen, ohne dabei n_{\max} zu beeinträchtigen,



den Erdkörper II erzeugen kann.

Bem. Die Figuren 17. geben für verschieden geneigte Wandflächen die Richtungen der Oberflächen an, bei welchen die

Theorie gültig ist oder nicht. Die meisten Fälle der Praxis werden zuersteren gehören.

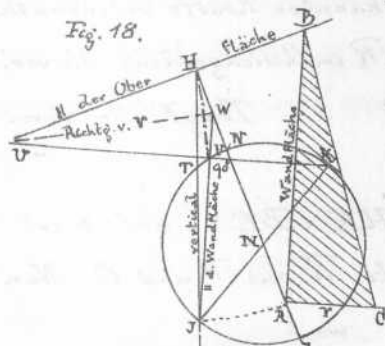
Anwendung der Theorie auf Bestimmung des Erddrucks gegen ebene Stützwände.

§. 12.

Aus den §§ 4-11 lassen sich folgende zwei Hauptmethoden zur Bestimmung des Erddrucks gegen eine ebene Wandfläche ableiten.

I^{tes} Verfahren.

Man lege durch einen beliebigen Punkt H (Fig. 18.) die



Geraden HB in der Richtung d. Oberfläche, HL normal zu dieser Richtung und HJ vertical, mache

$$HL = 1 \text{ und } HN = \lg^2 \left(\cos^2 \frac{\alpha}{2} \right)$$

(aus d. Tab. §. 8. zu entnehmen, ev. zu interpoliren), zeich-

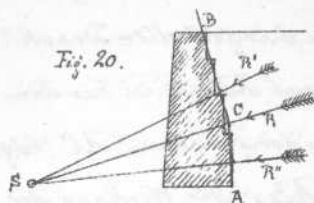
ne einen Kreis über LN als

Durchmesser, ziehe durch den unteren Schnittpunkt J der HJ mit dem Kreise den Durchmesser JK , ferner VW par. zur Wandfläche und KVV ; dann ist nach §. 4, 5 VW die Richtung des gesuchten Erddrucks R und HV die Größe der Pressung r im Punkte A der Wandfläche AB (hierbei ist der Maßstab so, daß $HJ = HA = y =$ der gegeb. Entfernung des Punktes A von der Oberfläche.)

Trägt man $AC = HV$ normal zur Wandfläche auf, so stellt der Flächeninhalt von $\triangle ABC$ die Größe, u. die Form des $\triangle ABC$ die Vertheilung des Drucks R gegen AB dar.

2. Unebene Oberfläche des gestützten Erdkörpers.

Fig. 20.



(Fig. 21.)

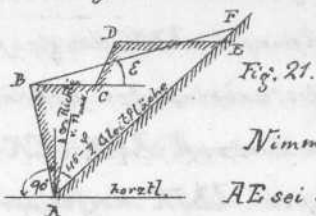


Fig. 21.

Nimmt man an,
AE sei die unbo.

kannte Gleitfläche (Trennungslinie des Prismas vom größten Druck),
ferner BF so gezogen, dass $\angle ABF = \angle ABCDE$ und $\angle \varphi = 45^\circ$, so
kann man aus folgender Tabelle den \angle entnehmen, welchen
 n_{\max} mit der Verticalen macht:

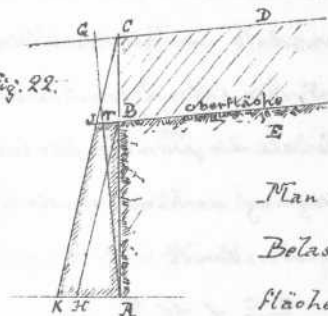
$$\varepsilon = 0^\circ \quad 5^\circ \quad 10^\circ \quad 15^\circ \quad 20^\circ \quad 25^\circ \quad 30^\circ \quad 35^\circ \quad 40^\circ \quad 45^\circ$$

$$\delta = 0^\circ \quad 1^\circ \quad 2^\circ \quad 3^\circ \quad 5^\circ \quad 6^\circ \quad 8^\circ \quad 10^\circ \quad 13^\circ \quad 22\frac{1}{2}^\circ$$

Da nun die Gleitfläche mit n_{\max} den $\angle 45^\circ - \frac{\varphi}{2}$ macht, so kann,
wenn BF nach Schätzung gezogen ist, ε , δ und damit AE er-
mittelt werden; hierauf wird BF genau bestimmt und R nach
§. 12 gesucht.

3. Die Oberfläche des Körpers belastet. (Fig. 22.)

Fig. 22.



Die Belastung wird gewöhnlich
erzeugt durch Eisenbahnzüge, Men-
schengedränge, Frachtwagen etc.

Man nimmt nun den Maximalwerth der
Belastung gleichmäßig vertheilt auf der Ober-
fläche an, ersetzt dieselbe durch ein glei-

ches Gewicht Erde und berechnet demnach die Höhe BC,

[z.B. $M_{\max. \text{ belstg.}} = 4000 \text{ Klg. p. Qm.}$

Gewicht d. Erde = 2000 Klg. p. cbm. gibt

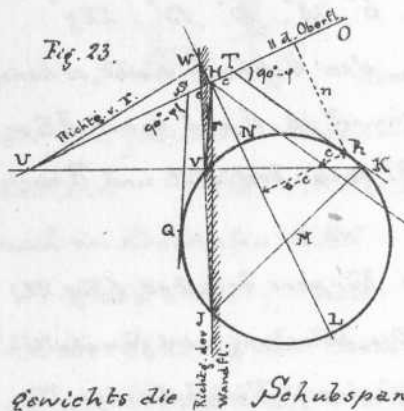
$BC = 2 \text{ m. }] ; \text{ durch } EBCD \text{ (} CD \parallel BE \text{)}$

ist die Belastung dargestellt.

Im Zustand von A ändert sich hierdurch nichts, als die

Ordinate y , welche ohne Belastung $= AT$, mit Belastung $= AG$ ist. Ist demnach ABH der graphisch dargestellte Druck (S. 10.) des unbelasteten Erdkörpers auf AB , so ist für den belasteten Zustand ACK ($CK \parallel BH$) der Druck auf AC , folglich Trapez $ABJK$ derjenige auf AB . Die Wirkung der Belastung besteht darin, daß der Erddruck R im Verhältniß von $ABJK : ABH$ sich vergrößert und der Angriffspunkt eine höhere Lage annimmt.

4. Die Cohäsion des Erdmaterials ist zu berücksichtigen (Fig. 23.)



Die von S. 1-5 entwickelten Gesetze gelten auch hier; nur ändert sich die Bedingung des Gleichgewichts und der Grenzzustände des selben.

Man hat hier in Betracht zu ziehen, daß im Fall des Gleichgewichts die Schubspannung S für irgend ein Flächenelement A stets kleiner bleiben muß als die Summe der beiden Widerstände, wodurch eine Bewegung verhindert wird, nemlich der Reibung und der Cohäsion, somit:

$$S < n \tan \varphi + C \quad \text{od.} \quad \frac{S-C}{n} < \tan \varphi.$$

Im Grenzzustande des Gleichgewichts muß der Maximalwerth von $\frac{S-C}{n} = \tan \varphi$ sein. Trägt man demnach auf einer Verticalen (Fig. 23.) die Länge $HJ = y$ (S. 32.) auf, zieht HT parallel und HL normal zur Oberfläche, macht

$HJ = HT = C$ (Länge C = der Höhe eines Erdprismas von d. Basis 1 und dem Gewicht gleich der Zahl C ; Druck

höhe), $\angle UJSQ = \angle OTR = 90^\circ - \varphi$ und construirt den kleineren der beiden Kreise, welche durch J gehen und SQ und TR berühren, so ist dieser in Verbindung mit TR und SQ die Darstellung des untern Grenzzustandes für jeden Punkt derjenigen Ebene, die in einer Entfernung y parallel zur Oberfläche gelegt ist, denn es ist

$$\frac{\sigma - c}{n} \max = \lg \varphi \quad \text{für die Richtungen } JSQ \text{ und } JTR.$$

Für ein Flächenelement von der Richtung JV ist nach §. 4, 5 UV die Richtung und HV Grösse der Pressung. Hier ist nicht mehr wie beim cohäsionslosen Erdkörper (§. 10.) die Richtung des Drucks unabhängig von y und die Grösse proportional zu y ; daraus folgt das Gesetz:

Bei Berücksichtigung der Cohäsion nimmt eine ebene Wand solche Pressungen auf, welche weder parallel noch nach dem Gesetz §. 10 vertheilt sind. Es müßten also die Drücke aller Elemente der ganzen Wandfläche bestimmt und zu R zusammen gesetzt werden; für praktische Zwecke genügt es jedoch in der Regel, die vom Fußpunkte der Fläche aufzunehmende Druckspannung nach Fig. 23. zu bestimmen und im Uebrigen das durch Fig. 15. dargestellte Vertheilungsgesetz anzuwenden.

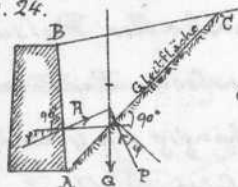
B.

Ältere Theorie von Coulomb,
Poncelet und Scheffler.

§. 14.

Princip: Man sucht das „Prisma vom größten Druck“ unter folgenden Annahmen:

Fig. 24.



1.) Der Wanddruck R greift wie ein hydrostatischer Druck in $\frac{1}{3} AB$ und unter dem $\angle \varphi'$ gegen die Normale der Wand an.

2.) Die Gleitfläche ist eine Ebene.

Im Grenzzustand des Gleichgewichts ist der in der Gleitfläche auftretende Gegenruck P unter dem $\angle \varphi$ gegen die Normale der Gleitfläche AC geneigt.

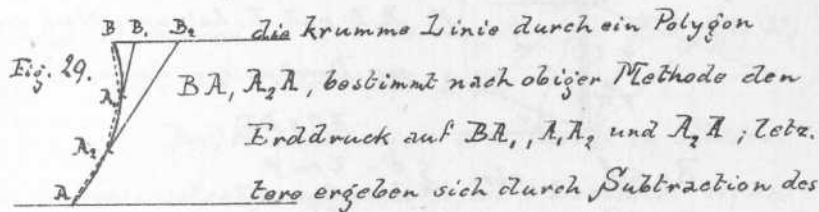
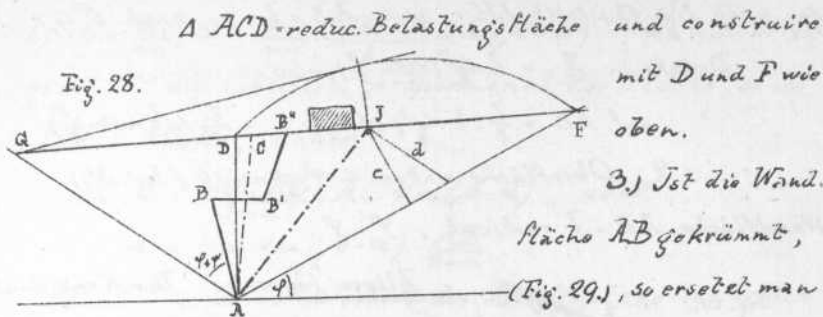
Den Grenzzustand des Gleichgewichts erreicht zuerst das Prisma vom größten Druck ABC , dessen Gewicht Q mit R und P im Gleichgewicht ist. Es ergibt sich hieraus eine Methode, welche aus dem Folgenden erhellt.

§. 15.

Gegeben das Profil des Erdkörpers (Fig. 25.);
 α/β = Neigung von AB gegen die Horizontale; gesucht der Erddruck R auf AB .

Ersetze zuerst die Belastung auf EF durch eine gleich schwere Erdschichte, deren Höhe = h sei, ziehe im Abstand $2h$ von EF $MD \parallel EF$, mache

$$\triangle ADE = \text{Vielseck } ABB'B'E \quad (\text{Schnittpkt } C);$$



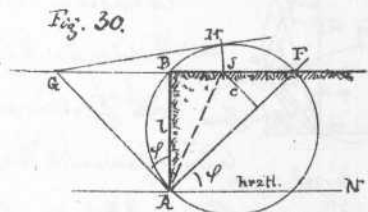
Drucks auf B_1A , von dem auf B_1A_2 und ebenso des Drucks auf B_2A_2 von dem auf B_2A ; alle Einzeldrücke setzen sich schließlich zum Gesamtdruck auf BA zusammen.

§. 16.

Uebereinstimmung der neueren und d. älteren

Theorie findet statt, wenn die Gleitflächen dieselben sind.

Beispiele. 1.) Oberfläche horizontal. Wandfläche $AB = l$ vertical, $\varphi' = 0$.



Nach der älteren Theorie be-
schreibe (Fig. 30.) über BF einen
Kreisbogen durch A, dann ist
AG Tangente am Kreis (weil
 $\angle BFA = \angle BAG$) = $\angle GJ$, also $\angle GAJ = \angle JAF = \angle JAN$, somit
 $\angle BAJ = \angle JAF$ und $BJ = c$;

$$R = \frac{c^2}{2} = \frac{BJ^2}{2} = \frac{l^2}{2} \cdot \lg^2(45 - \frac{\varphi}{2}).$$

Nach der neueren Theorie ist (Bezeichnung

gen nach Fig. 13, Stell 13/ $JH = y = AB = l$; nach S. 9, 1

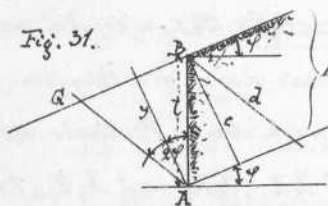
Druck in $A = l \lg^2 (45 - \frac{\varphi}{2})$, also

$$" \text{ auf } AB = \frac{l}{2} \cdot l \lg^2 (45 - \frac{\varphi}{2}) = \frac{l^2}{2} \lg^2 (45 - \frac{\varphi}{2})$$

2.) Oberfläche unter $\alpha \varphi$ geneigt (Fig. 31.)

Wandfläche $AB = l$ vertical ; $\varphi' = \varphi$.

Fig. 31.



Ältere Theorie. Der Kreis durch

A, B und F hat unendlich gro-
ßen Durchmesser, daher

$$AF \parallel BF ;$$

$$R = \frac{c \cdot d}{2} , \text{ aber } \begin{cases} c = l \cos \varphi \\ d = \frac{l}{\cos \varphi} = l \end{cases}$$

$$R = \frac{l^2}{2} \cos \varphi.$$

Nach der neueren Theorie (S. 9, 2) ist

$$\text{Druck in } A = y = l \cos \varphi$$

$$" \text{ auf } AB = \frac{l}{2} \cdot l \cos \varphi = \frac{l^2}{2} \cos \varphi$$

S. 17.

Bestimmung der Cohäsionskraft C .

Es sei (Fig. 32.) AC die Gleitfläche des Erdkörpers
unter der Annahme, daß $C = 0$, AB die durch die Ein-

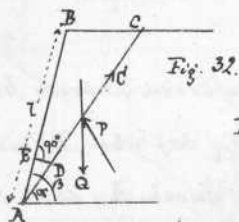
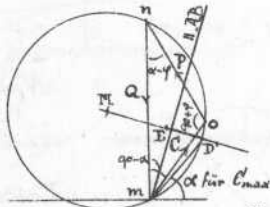


Fig. 33.



wirkung der
Cohäsion sich
bildende Bösch-
des Erdkörpers.

Gleichgewicht hin-

$$\left(\begin{array}{l} mn = \frac{AB}{2} \\ AD = mo. \end{array} \right)$$

det demnach statt zwischen dem Gewicht Q von ABC , dem Ge-
gendruck P unter $\alpha \varphi$ zur Normalen von AC und der Sum-
 C der in der Richtung von AC auftretenden Cohäsionswider-
stände, hieraus folgt der Kräfteplan (Fig. 33.) und

1.) $C = \frac{m \cdot o}{mn} \cdot Q = \frac{m \cdot o}{mn} \cdot \frac{AB \cdot AC}{2} \sin(\beta - \alpha)$; da nun erfahrungsgemäß die Cohäsion proportional der Fläche, so ist auch 2.) $C = AC \cdot c$, daher

$$AC \cdot c = \frac{m \cdot o \cdot AB}{2mn} \cdot AC \cdot \sin(\beta - \alpha) \quad \text{oder}$$

$$c = m \cdot o \cdot \sin(\beta - \alpha) \cdot \frac{AB}{2mn}$$

Nimmt man den Maßstab des Kräfteplans so an, daß $mn = \frac{AB}{2}$ ist, so wird $c = m \cdot o \cdot \sin(\beta - \alpha) = ED$ (Fig. 32), wenn $AD = m \cdot o$ und $DE \perp AB$.

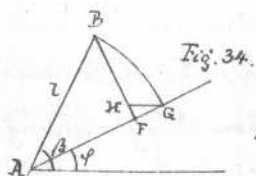
Bei Veränderungen in α bleiben im Kräfteplan der Voraussetzung nach m und n fest, o beschreibt einen Kreis, weil $\angle 90^\circ + \varphi$ constant ist (Fig. 33.)

Bestimmung von C_{\max} . Derjenige α , welcher C_{\max} liefert, ergibt sich durch das Loth $ME'D$, welches man vom Mittelpunkt M des von O beschriebenen Kreises auf eine Parallele zu AB fällt; es ist dann $D'E' = C_{\max}$ und mD' die Richtung von C_{\max} .

Aus Fig. 33 ergibt sich

$$MD' = Mm = \frac{mn}{2 \cos \varphi} = \frac{l}{4 \cos \varphi} \quad \text{und}$$

$$C_{\max} = E'D' = MD'(1 - \cos(\beta - \varphi)) = \frac{l(1 - \cos(\beta - \varphi))}{4 \cos \varphi}; \quad \text{ferner}$$



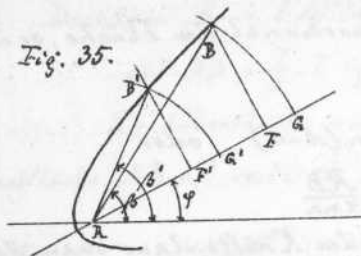
ist in Fig. 34. $GH = \frac{l(1 - \cos(\beta - \varphi))}{\cos \varphi}$; da nun in einem Erdkörper C_{\max} constant ist, so ist auch $GH = 4C_{\max}$ für verschiedene Werthe von l und dazu gehörige α/β constant.

Nimmt man (Fig. 35.) verschiedene $AG = l$ an und trägt das aus einer Beobachtung zu findende constante GF ab, so ergibt sich als Ort von B eine Parabel, deren Achse AG und deren Scheitel um $\frac{FG}{2}$ von A absteht. Diese Pa-

rabel gibt l für jeden α/β und umgekehrt.

Die Cohäsionshöhe l_0 ist das zu $\beta = 90^\circ$ gehörige l .

Fig. 35.

Tabelle v. François für l/p_0 .

$\cotg \varphi =$	$\cotg \varphi_0$	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
$\cotg \beta$	0,0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	0,1	1,35	1,32	1,29	1,27	1,25	1,24	1,23
	0,2	1,71	1,64	1,59	1,55	1,52	1,49	1,47
	0,3	2,35	2,19	2,08	1,99	1,91	1,86	1,81
	0,4	3,36	3,02	2,78	2,60	2,46	2,35	2,26
	0,5	5,11	4,34	3,84	3,48	3,22	3,02	2,87
	0,6	8,41	6,63	5,53	4,83	4,33	3,97	3,69
	0,7	15,77	10,90	8,42	6,96	6,00	5,33	4,84
	0,8	37,41	20,47	13,92	10,61	8,65	7,39	6,51
	0,9	157,39	48,65	26,65	17,51	13,18	10,65	9,01
	1,0	∞	204,69	61,95	32,86	27,77	16,21	12,98

Zusätze: 1.) Hat die Erdmasse eine gebrochene Begrenzungslinie (Fig. 36.) $B''B'BA$, so zieht man AC so, daß

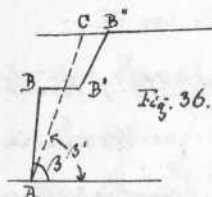


Fig. 36.

$\Delta ACB'' = \Delta ABB''$; alsdann hat man AC und β' statt AB und β im vorigen S' zu setzen und im übrigen ebenso zu verfahren.

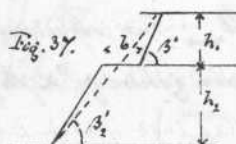


Fig. 37.

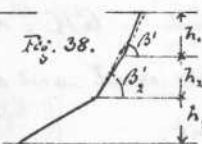


Fig. 38.

2.) Mit Hilfe einer solchen Ausgleichung bestimmt man die Form

gebrochener Einschnittsböschungen von geg. Tiefe (Fig 37 u. 38.), indem man nach obigem Verfahren erst die Neigung des obersten Theils, dann diejenige (β'_2) der Ausgleichungslinie vom Fuß des 2. Theils u.s.w. sucht.

3.) Ist eine Belastung vom specifischen Gewicht der Erde und der Höhe h vorhanden (Fig. 39.), so zieht

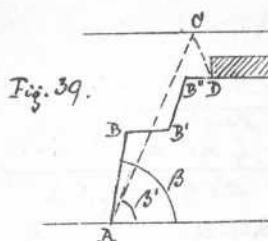


Fig. 39.

man eine Parallele zur Oberfläche im Abstand

$2h$ von ihr und die Ausgleichungslinie AC so, daß

$\triangle ACD = \triangle ABB'D'$; dann tritt AC u.

β' an die Stelle von AB und β bei oben beschrieb. Verfahren.

§. 18.

Bestimmung des Angriffspuncts des Erd- drucks R .

Sind für verschiedene Mauertiefen $BA_1 = x_1$, $BA_2 = x_2, \dots$ die Erddrücke $= R_1, R_2, \dots R$, so ist der Druck auf $A_1 A_2, A_2 A_3, \dots = R_2 - R_1, R_3 - R_2, \dots$; wird nun $A_1 A_2, \dots$ unendlich klein $= dx$, so werden die Erddrücke auf die so Elemente $= dR$, also da R die Resultante aller Elementar-drücke, das Moment um B

$\int dR \cdot x = R \cdot x_0$, wo x_0 der Abstand d. Angriffspuncts I von B ist. Trägt man R_1, R_2, \dots als Ordnen zu den Abscissen x_1, x_2, \dots auf, so erhält man eine Curve BC ; es

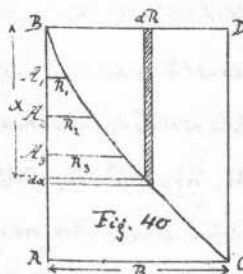


Fig. 40.

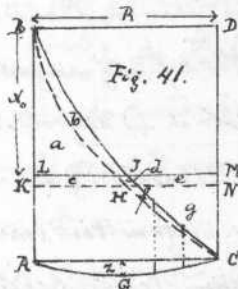


Fig. 41.

soll nun (Fig. 41.) sein:

$$BJCD = \int dR \cdot x = R \cdot x_0 = BLMD$$

Man legt durch B als Scheitel und C eine Parabel, trägt die durch beide Curven

von Parallelen zu BA abgeschnittenen Stücke $\perp AC$ auf,

macht $BK = \frac{2}{3} BA$, so ist, wenn man die Curve über AC als Parabelsegment betrachtet, $LK = \frac{2}{3} z$, wenn z der Pfeil jener Curve.

Beweis (Fig. 41.) $BHCD = \frac{2}{3} BACD = BKND$, also

$$\frac{a+c}{b+d+f} = \frac{f+g}{AC \cdot z} = \frac{c+d+e}{AC \cdot z}$$

addirt

$$\frac{a+b}{BLMD} = \frac{e+g}{BJCD}, \text{ folglich}$$

$$BLMD = BJCD.$$

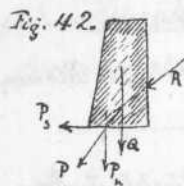
Bem. In d. Praxis nimmt man meist $BL = \frac{2}{3} BA$.

II.

Bestimmung der Stärke von Futtermauern.

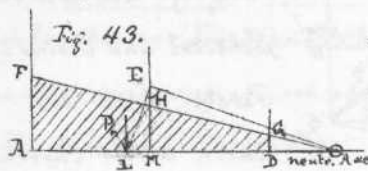
S. 19.

Die Stärke und damit die Stabilität einer Mauer ist abhängig von der Größe und Lage des aus Erddruck und Mauergewicht sich zusammensetzenden Drucks P auf die am meisten beanspruchte Mauerfuge (in der Regel die Fundamentfuge, Fig. 42). Der Druck P zerlegt sich in eine Schub- und eine Normalcomponente.



1.) Die Schubcomponente ist in der Regel ohne Einfluss auf die Stärke der Mauer, wenn im Mauerwerk selbst ein zweckmäßiger Verband oder Verdollung angewendet wird.

2.) Den Einfluss der in L angreifenden Normalcomponente P_n auf eine Fuge AD (Fig. 43)



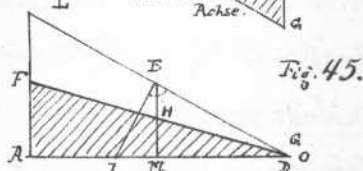
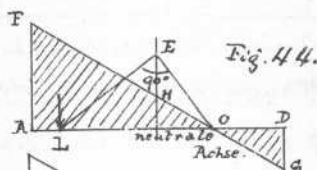
ermittelt man mit Hilfe der neutralen Achse (Festigkeitslehre S. 8.) und zwar:

$$AM = MD, \text{ mache } ME = \sqrt{\frac{AD^2}{12}}, \text{ ziehe}$$

LE und $EO \perp LE$, so geht die neutrale Achse durch O , mache $MH = \frac{P_n}{AD}$ und ziehe OH , so gibt das Trapez $ADGF$ die Darstellung der Druckvertheilung in der Fuge AD .

a.) Fällt O außerhalb AD , dann hat AD nur Druck aufzunehmen (Fig. 43)

b.) Fällt O zwischen A und D , dann ist AD theils Zug-, theils Druckspannungen unterworfen (Fig. 44.)



c.) Grenzfall (Fig. 45.): O rückt nach D , wenn

$$AL = \frac{1}{3} AD.$$

Da das Mauerwerk im Allgemeinen keine Zugkräfte aufnehmen soll, so erhält aus Obigem:

Der Angriffspunkt des Fugendrucks soll immer im mittleren Drittel der Fuge liegen.

§. 20.

Pract. Regeln für Bestmng. d. Mauerstärke.

Man nehme eine beliebige Mauerstärke an, suche die Druckspannung an der gefährlichsten Stelle (Fundamentfuge) und $\left\{ \begin{array}{l} \text{vergrößere} \\ \text{verkleinere} \end{array} \right\}$ die Fugenlänge durch Probiren so, daß die zulässige Inanspruchnahme oder Belastungshöhe des betr. Materials erzielt wird.

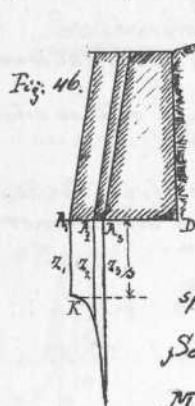
In Folgendem ist

• d. Höhe eines geraden Prismas v. d. Basis 1^{00}cm und dem Gewicht $s \text{ kg}$, also $d^m \cdot 1^{00} \frac{g}{10} = s \text{ kg}$, wo g spec. Gewicht.

Grenzwerte der Druckhöhe.

Material	Zul. Druck pro q cm σ	Zul. Druck- höhe d
Backsteine u. Bruchsteine	6 kg	30 m.
Ordinaireres Mauerwerk	10 "	50 "
Gutes Quadermauerwerk	20 "	100 "
Vorzügliches Mauerwerk	30 "	150 "
Maxima (bei Kirchthürmen, Brücken)	40 "	200 "

Beispiel. Man nimmt drei Mauerstärken so an, daß die richtige Stärke voraussichtlich zwischen der kleinsten u. größten liegt; DA_1, DA_2, DA_3 , bestimmt nach §. 19 für die



selben die Inanspruchnahmen z_1, z_2, z_3 in der gefährlichsten Stelle A_1, \dots , trägt diese in A_1, A_2, A_3 vertical auf und verbindet die Endpunkte durch eine stetige Curve, zieht im Abstand σ (zul. Inanspruchnahme) eine Parallele zu AD , so gibt der Schnittpkt K auf AD projectirt, die gesuchte Mauerstärke.

§. 21.

Methode von Poncelet.

Man multiplicirt den Brddruck R mit dem Stabilitätscoefficienten k (der in der Regel = 2 angenommen wird) und ermittelt den aus $kR = R'$ und dem Gewicht Q der Mauer resultirenden Fügendruck P ; die angenommene Mauerstärke genügt, wenn P durch A geht.

Bemerkungen. 1.) Bei der neueren Theorie des

Erddrucks wird K in der Weise vorwerthet, daß man die

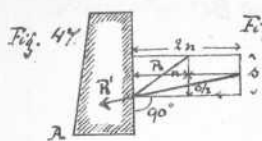


Fig. 48.



Normalcomponente n

von R mit K multiplicirt, die

Schubcomp. s mit K divi.

dirbt, um die in Betracht

zu ziehende Richtung von R' zu finden. (Fig. 47.)

2.) Bei der älteren Theorie, wo die Richtung von R nicht bekannt ist, nimmt man $R' = K \cdot R$ unter $10^\circ - 15^\circ$ gegen die Normale der Mauer an. (Fig. 48.)

§. 22.

Behandlung specieller Fälle n. d. Methode von Poncelet (§. 21.).

Die in der Praxis vorkommenden Futtermauern haben in der Regel die zwei beigezeichneten Hauptformen.

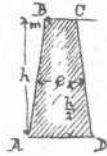


Fig. 49.



Fig. 50.

4 Hauptaufgaben sind dabei zu lösen:

1. Gegeben CD und BC , gesucht AD .
2. Gegeben CD und $\frac{m}{h}$, gesucht BC
3. Gegeben AB und BC , gesucht AD
4. Gegeben CD , gesucht $AD = BC$.

§. 23.

Vorbereitung für die graphische Lösung.

Fig. 49. Gewicht Q von $ABCD = \frac{AD+BC}{2} \cdot h \cdot 1^m \cdot g'$
pro 1^m Tiefe; $\frac{AD+BC}{2} = e$ (in halber Höhe von h gezogen), also Q proportional e , durch e darstellbar.

$$BC = 2b ; BM' = b + \frac{m}{2} \text{ gibt } BD = \sqrt{2ab} \text{ und} \\ EB = -(\frac{m}{2} + b) + \sqrt{2ab + (\frac{m}{2} + b)^2}.$$

Aufgabe 3. Gegeben AB und BC , gesucht AD .

(Fig. 60.) Versuchsmethode: Man nimmt CD' an und

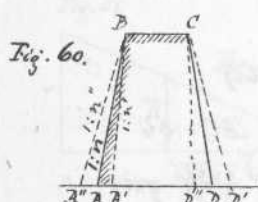


Fig. 60.

findet hierzu nach Aufgabe 1. BA' mit einem Anlauf $1:n'$ statt $1:n$; ebenso findet man aus CD'' BA'' mit $1:n''$ statt $1:n$.

Das richtige Mauerprofil findet man mit genügender Genauigkeit durch Interpolation von D zwischen D'' und D' nach dem Verhältniß $n' - n : n - n''$.

Aufgabe 4. Gegeben Curve CD ; gesucht Entfernung $x = BC$ der concentrischen Curve AB (Fig. 61.)

Man bestimmt die Erddrücke auf die gebrochene Wand.

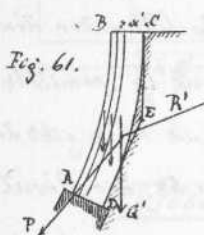


Fig. 61.

Fläche DEC (§. 15, 3),

setzt sie zur Resultante R zusammen und bestimmt R' , nimmt sodann eine beliebige, eher zu geringe als zu große Stärke x' an, ermittelt die Resultante P' aus R' und Q' , setzt concentrische Lamellen an und sucht der Reichenach P', P'', \dots , was mittelst Kräfteplan und Seilpolygon leicht auszuführen, bis P schließlich durch A geht.

Anmerkung. Man findet den Schwerpunkt S der Lamellen als Schwerpunkt des mittl. Kreisbogens und zwar (Fig. 62.):

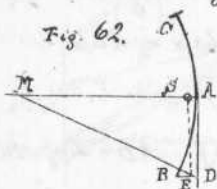


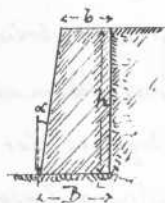
Fig. 62.

M Mittelpunkt des Bogens BC ; $AB = AC$;

Tangente AD = rectificirtem Kreisbogenstück AB ; MD und $BE \parallel AM$ gibt E , $ES \parallel AD$.

Anhang.

Tabelle für die Stärke v. Futtermauern nach Redtenbacher.



$$19\alpha = \frac{1}{5} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{10} \quad \frac{1}{12} \quad \frac{1}{20} \quad 0$$

$$\frac{B}{h} = 0,308 \quad 0,301 \quad 0,294 \quad 0,291 \quad 0,289 \quad 0,286 \quad 0,285$$

$$\frac{b}{h} = 0,108 \quad 0,135 \quad 0,169 \quad 0,191 \quad 0,206 \quad 0,236 \quad 0,285$$

§. 25.

Berechnung v. Stützmauern m. Strebpfeilern.

Entfernung der Strebpfeiler a , Breite derselben a' ; gesucht die Kronenbreite x .

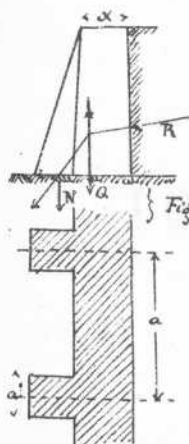
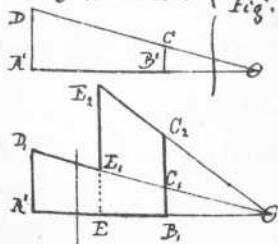
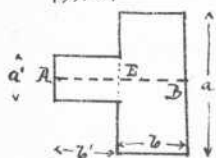


Fig. 63.

Man nimmt wie gewöhnlich eine Breite x an, betrachtet das Gleichgewicht des einem Pfeiler entsprechenden Theils der Mauer (Fig. 64.), bestimmt das Gewicht desselben und setzt es mit dem auf die Breite a wirkenden Erddruck zusammen, so sei N die Normalcomponente der Resultante in der gefährl. Fuge (Fundamentfuge).



Stellt die Fläche AB, CD die Druckvertheilg in AB vor, d.h. sind die Ordinaten der Geraden DC = den Pressungen in AB , so sind diese Ordinaten von A bis E mit a' , von E bis B mit a zu multipliciren, um die

Fig. 64.

in der ganzen Fugenfläche wirkenden Drücke zu erhalten, was durch die Fläche $F = A, B, C, E, D$, dargestellt ist. Man hat nun, wenn σ die Inanspruchnahme in A ist, die Bedingung, daß

1.) $N = \text{Fläche } F$, in welcher $A, D, = a \cdot \sigma$ und

$$EE_2 = EE, \frac{a}{a'}$$

2.) Moment von $N = \text{Moment von } F$, in Bez. auf einen beliebigen Punkt, weil N durch den Schwerpunkt von F gehen soll.

Die Richtigkeit oder Unrichtigkeit der Annahme von σ ergibt sich bei analyt. Ausführung dieser Bedingungen, wobei A, O und A, D , als Unbekannte zu betrachten sind, dadurch daß $\sigma = \frac{A, D}{a'} = \text{der zulässigen Inanspruchnahme sein muß.}$

TECHN. MECHANIK.

IV. Kapitel.

Berechnung
der symmetrischen
TONNENGEWÖLBE.

Herausgegeben
vom Ingenieur-Verein.
Polytechnikum Stuttgart.

1876.

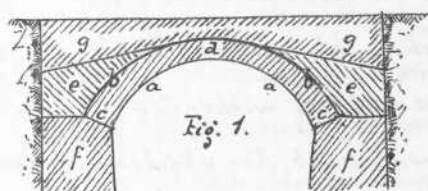
Berechnung der Tonnengewölbe, Pfeiler und Widerlager .

Einführung.

§. 1.

Im Folgenden soll nur das nach Anlage und Belastung symmetrische Tonnengewölbe betrachtet werden.

An diesem Gewölbe wird unterschieden:



Leibung *aa*

Rücken *bb*

Kämpfer *c*

Scheitel *d*

Hintermauerung *e* Widerlager *f* und

Hinterfüllung *g* .

Eigengewicht und Belastung werden auf die ganze Gewölbebreite gleichmäßig vertheilt angenommen, so daß der Berechnung stets ein Gewölbe von der Breite 1 zu Grunde gelegt werden kann.

Die Aufgabe ist zunächst, die Art und Weise der

Vertheilung und Wirkung des Drucks im Gewölbe und den Einfluss von Gewölbbform, Materialfestigkeit und Lage der Belastung zu ermitteln; ist dies geschehen, so lassen sich die Aufgaben über Bestimmung der Gewölbedimensionen und der zweckmässigsten Gewölbeform lösen.

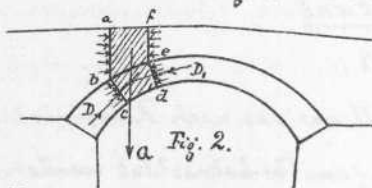
A.

Theoretische Untersuchung.

§. 2.

Ermittlung der Fugendrucke.

Ein nach Fig. 2. aus einem stabilen Gewölbe abge-



trennter Theil $a b c d e f$ bleibt im Zustand des Gleichgewichts, wenn die vorher in

den Trennungsflächen ab, bc, cd, de, ef wirkenden inneren Kräfte durch Außenkräfte ersetzt werden. Nimmt man zu, nächst an, dass in den Flächen ab und ef Kräfte wirken, welche gegenüber den in bc und cd wirkenden als sehr klein vernachlässigt werden können, so ist der abgetrennte Gewölbe theil im Gleichgewicht unter Einwirkung der Kräfte D und D_1 , welche gleich den Resultanten der elementaren Drücke auf die Fugenflächen sind und der Kraft Q , die sich aus dem Eigengewicht des Gewölbetheils und der ihm entsprechenden Belastung (Hintermauerung etc.) zusammensetzt.

Nun ist aber die Berechnung der Fugendrucke D und D_1 eine unbestimmte Aufgabe, da weder das Verthei-

theil II (Gewicht Q_2) vollkommen bestimmt und der Angriffspunct F ergibt sich aus der Bedingung, daß D_1 , dessen Richtung aus dem Kräfteplan gefunden wird, durch den Schnittpunct E von D und Q_2 gehen muß; oder wäre umgekehrt der Angriffspunct F für den Fugendruck D_2 gegeben, so würde sich aus den Gleichgewichtsbedingungen für den ganzen Gewölbe theil vom Gewichte $Q = Q_1 + Q_2$ H der Größe nach bestimmen und der Fugendruck D würde aus den Gleichgewichtsbedingungen für den Gewölbe theil I berechnet werden.

Aus den Kräfteplänen zur Bestimmung von D und D_2 sieht man, daß der Scheiteldruck H die Horizontalcomponente beider Fugendrucke darstellt; dies gilt wie für jeden Fugendruck auch für den Kämpferdruck und man nennt H den Horizontalschub des Gewölbes.

§. 3.

Wirkung der Vertheilung des Fugendrucks in einer Fuge.

Die Vertheilung des Drucks in einer Fuge (§. 10.) ist abhängig von der Lage seines Angriffspuncts; die selbe kann derart sein, daß die Festigkeit des Gewölbe materials überschritten wird und ein Abspringen der Fugenkanten eintritt. Die Druckvertheilung wird um so günstiger, je mehr sich der Angriffspunct des Fugendrucks der Mitte der Fuge nähert.

Eine Momentengleichung um den innersten oder äußersten Punct der Fuge lehrt ferner, daß der Angriffspunct

punct des Fugendruckes nie außerhalb der Fuge liegen darf, da die Fuge sonst einen Zug aufzunehmen haben würde,

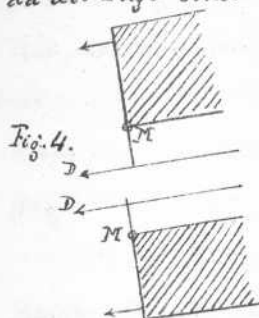


Fig. 4.

was, von der Cohäsionsfestigkeit des Mörtels abgesehen, nicht möglich ist; die Fuge würde sich öffnen und das Gewölbe einstürzen.

Zerlegt man ferner den Fugendruck in eine Componente N normal zur Fuge und eine Componente T in derselben,

so muß T kleiner sein als der Reibungswiderstand der Fuge, also

$$T < fN, \text{ wo } f \text{ der Reibungscoefficient,}$$

oder wenn α der Winkel der Normale mit D und φ der Reibungswinkel ist, so muß $\alpha < \varphi$ sein, da

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{T}{N} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} \varphi = f = \frac{fN}{N} < \frac{T}{N}.$$

Wäre $\alpha > \varphi$, so würde ein Gleiten in der Fuge eintreten.

NB. α ist in der Regel so klein, daß eine Untersuchung der Stabilität in Bezug auf Gleiten nur in seltenen Fällen nöthig ist.

§. 4.

Vertheilung des Druckes im ganzen Gewölbe. (Drucklinie).

Hat man für eine größere Anzahl Fugen unter Annahme der Angriffspuncte des Scheitel drucks H und irgend eines andern Fugendruckes die Angriffspuncte aller Fugendrucke bestimmt und man verbindet diese Puncte durch gerade Linien, so erhält man ein Polygon, das ein Bild von der Vertheilung des Druckes im Gewölbe gibt; die

ses Polygon nennt man Drucklinie; hätte man die Angriffspunkte der Fugendrucke für unendlich viele Fugen construiert, so hätte man als Drucklinie eine Curve erhalten, welche das Polygon einschließt. Diese Druckcurve hat nun nach dem Bisherigen die Eigenschaft, daß eine im Schnittpunkt der Curve mit einer Fuge an die erstere gezogene Tangente die Richtungslinie des betr. Fugendrucks darstellt.

Solcher Druckcurven kann man nun aber für dasselbe Gewölbe unter den gleichen Belastungsverhältnissen unendlich viele construiren, je nach der Wahl der oben erwähnten Angriffspunkte; jede derselben stellt nach §. 3. einen Gleichgewichtszustand dar, wofern dieselbe

- 1.) ganz innerhalb des Gewölbes liegt
- 2.) eine solche Lage im Gewölbe hat, daß sie an keiner Stelle der Leibung oder dem Rücken so nahe kommt, daß eine Überschreitung der für das Gewölbematerial zulässigen Inanspruchnahme eintritt.
- 3.) jede Tangente mit der Normale der entsprechenden Fuge einen Winkel einschließt, der kleiner ist als der Reibungswinkel des Mauerwerks bei weichem Mörtel.

In der Regel wird dieser Winkel = $20-30^\circ$ genommen.

§. 5.

Günstigste Drucklinie

Jede Gewölbfuge wird an verschiedenen Stellen mehr oder weniger stark beansprucht, es tritt also in jeder Fuge eine bestimmte Maximalinanspruchnahme auf. Diejenige Drucklinie, für welche die Differenz der

Maximalinanspruchnahmen der verschiedenen Fugen ein Minimum wird, heißt die günstigste Drucklinie.

Es ist nun die Frage, welche Drucklinie den wirklichen Zustand darstellt; nach der Theorie von Culmann ist dies eben die günstigste Drucklinie, indem das Gewölbe bestrebt ist, durch kleine Formveränderungen während und nach der Ausschaltung eine möglichst gleichmäßige Inanspruchnahme selbst hervorzurufen, wie dies z. B. beim Abspringen von Kanten ersichtlich ist. Dieses Abspringen tritt ein, wenn die Drucklinie der Kante zu nahe kommt und ist das Abspringen erfolgt, so geschieht die Druckübertragung in einem der Gewölbemitte näher liegenden Theil der Fuge; die Drucklinie hat also eine günstigere Lage angenommen.

Im Folgenden ist obige Annahme zu Grunde gelegt.

B.

Berechnung.

§. 6.

Gang der Berechnung.

Nach §. 2 construirt man für eine nach praktischen Erfahrungen gewählte Gewölbestärke die günstigste Drucklinie, nachdem vorher zur Vereinfachung der graphischen Berechnung Eigengewicht und Belastungen auf eine geeignete Masseneinheit reducirt sind (siehe §. 4.). Alsdann werden nach §. 10. die der günstigsten Drucklinie entspre-

chenden Maximalansprüchen ermittelt und je nach dem diese sich größer oder kleiner als die zulässige Inanspruchnahme des Gewölbematerials ergeben, und je nachdem man auf den einen oder andern Factor der Gewölbeconstruction einen größeren Werth legt, entweder

- a.) die Gewölbestärke verkleinert od. vergrößert, oder
- b.) die Form des Gewölbes oder
- c.) die Art der Belastung

derart verändert, daß eine völlige Übereinstimmung der Drucklinie mit der Mittellinie des Gewölbes herbeigeführt u. dadurch die den äußeren Bedingungen entsprechende sog. zweckmäßigste Gewölbform erreicht wird.

§. 7.

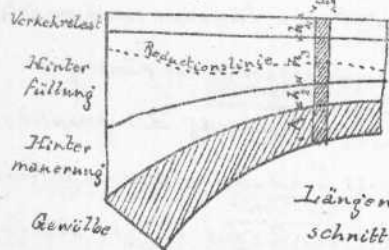
Eigengewicht und Belastung.

Diese setzen sich zusammen aus

- a.) dem Gewicht des Gewölbes, dessen spec. Gew. g_1 ,
- b.) " " d. Hintermauerg., deren spec. Gew. g_2 ,
- c.) " " d. Hinterfüllung, " " " g_3 ,
- d.) " " der Verkehrslast K pro Q. m.

Ist die Verkehrslast durch eine Fläche von

Fig. 5.



der Höhe h_4 derart dargestellt, daß

$K = h_4 \cdot g_1$, so ist das Ge-

samtgewicht eines zwischen zwei Senkrechten liegenden Streifens von der Breite

dx (Fig. 5.)

$$dQ = 1^m dx \{ h_1 g_1 + h_2 g_2 + h_3 g_3 + h_4 g_1 \};$$

man verwandelt nun die Höhen h_2 und h_3 zur Vereinfachung der graphischen Rechnung so, daß sie die Höhen eines Körpers vom gleichen specifischen Gewicht wie das Gewölbematerial und vom gleichen absoluten Gewicht wie die in Betracht kommenden Theile der Hintermauerung u.s.w. darstellen; also

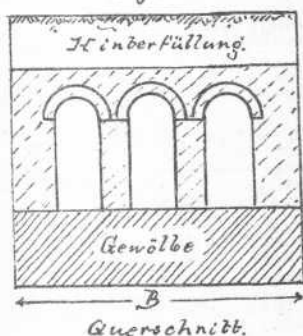
$$h_2 = h_2 \cdot \frac{g_2}{g_1} ; \quad h_3' = h_3 \cdot \frac{g_3}{g_1} ; \quad \text{nun ist}$$

$$dQ = 1^m dx \cdot g_1 \{ h_1 + h_2' + h_3' + h_4 \} \quad \text{oder}$$

$$dQ = 1^m dx \cdot g_1 \cdot h'.$$

Wie für den betrachteten Streifen führt man die Reduction für den ganzen Längenschnitt aus und erhält dadurch die reducirt Belastungsfläche, welche nach

Fig. 6.



dem Bisherigen die Eigenschaft hat, daß ihre Höhen in jedem Punkte des Längenschnitts den Belastungen proportional sind.

Anmerkung. Sind in der Hinter-

mauerung sog. Spandrilräume vorhanden,

so muß die Höhe h_2 der Hintermauerungsfläche erst für sich so bestimmt werden, daß Bh_2 gleich ist dem Inhalt des Hintermauerungsquerschnitts (nach Abzug der Hohlräume).

a.) Graphische Methode.

§. 8.

Construction der Drucklinie.

Bei der Construction der Drucklinie werden die Gewölbefugen (mit Ausnahme der Kämpferfuge)

nicht normal zur Liebung, sondern vertikal angenommen; die Correction des dadurch entstehenden kleinen Fehlers wird in S. 9. gezeigt werden.

Zur Construction werden die Angriffspunkte A und B des Scheiteldrucks H und des Kämpferdrucks R beliebig angenommen und zwar am besten in den Fugenmitten, da in den meisten Fällen die günstigste Drucklinie nahezu durch die Kämpfer- und Scheitelfugenmitte geht. Nach S. 2. bildet R, H und die Gesamtlast Q des halben Gewölbes ein Gleichgewichtssystem, woraus R und H berechnet werden können. Die Größe von Q ist ausgedrückt durch die reducirte Belastungsfläche, während die Lage durch den Schwerpunkt der Belastungsfläche bestimmt ist. Es wird nun die Verticale dieses Schwerpunktes mittelst eines Seilpolygons ermittelt nach dem Satz, daß die Resultante einer Reihe von Kräften durch den Schnittpunkt der Endspannungen eines mit beliebigem Horizontaltzug aus diesen Belastungen construirten Seilpolygons gehen muß.

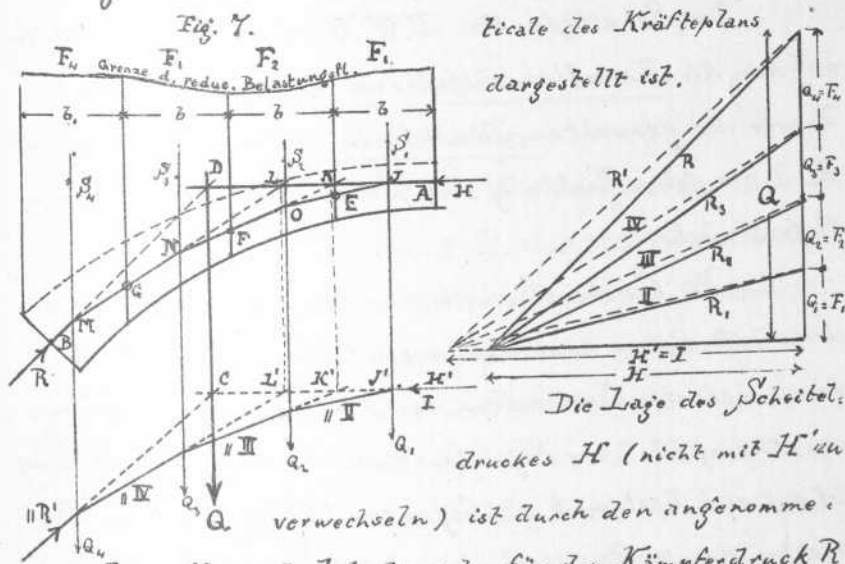
Man theilt zu diesem Zwecke die Belastungsfläche vom Scheitel aus durch Verticale in Lamellen von gleicher Breite b , wozu letztere am besten gleich einer runden Zahl derart gewählt wird, daß die Schwerlinien der trapezförmigen Lamellen mit genügender Genauigkeit von Auge bestimmt werden können.

Bem. Man erinnert sich hierbei, daß die Schwerlinie stets um weniger als $\frac{b}{6}$ von der Mittellinie des Trapezes abweicht.

Die letzte am Kämpfer liegende Lamelle erhält im allgemeinen eine andere Breite b , und ist hierauf bei Berechnung der Belastungen Rücksicht zu nehmen.

Durch die Wahl einer gleichen Breite der Lamellen erreicht man den Vortheil, daß ihr Gewicht senähert proportional ist ihren mittleren Höhen h' ; das Gewicht einer Lamelle ist bei 1^m Tiefe, wenn b u. h' in metr. ausgedrückt: $Q_b = b \cdot h' \cdot g \cdot 1^m = (b \cdot h')^{cbm} \cdot g = b \cdot h' \cdot g$.

Man construirt nun (Fig. 7.) aus den Flächen $b \cdot h'$ der Lamellen als Belastungen mit belieb. horizontaler Angriffsspannung H' einen Kräfteplan und das zugehörige Seilpolygon in der in der Figur angedeuteten Weise; der Schnittpunct C der beiden Endspannungen H' u. R' gibt die Lage von Q , während die Grösse von Q durch die Ver-



R ergibt sich, indem man durch die Endpunkte von Q im Kräfteplan Parallelen zu AD und BD zieht.

Bem. Wie bei Q , so sind bei allen Kräften die Längen, durch welche sie im Kräfteplan dargestellt werden, mit dem spec. Gew. g , des Gewölbes zu multipliciren.

Sind H und R bekannt, so lassen sich nach §. 2 die einzelnen Fugendrucke ermitteln. Man sieht leicht, daß die Drucklinie nichts anderes ist als ein mit dem Horizontalzug H aus den Gewichten der Gewölbelamellen construirtes Seilpolygon; man zeichnet also die Drucklinie, indem man aus den Gewichten der Lamellen mit dem Scheiteldruck H als Horizontalzug wie oben mit H' ein zweites Seilpolygon construiert, das durch den Punkt A geht; zur Probe muß das Seilpolygon auch durch B gehen.

Die Schnittpunkte $E, F, G \dots$ der Seilspannungen mit den die Lamellen abtheilenden Verticalen sind Punkte der gesuchten Drucklinie und die Spannungen $R_1, R_2 \dots$ geben Richtung und Größe der entsprechenden Fugendrucke.

Die Construction des zweiten Seilpolygons aus den Kräfteplänen kann man vereinfachen, wenn man bedenkt, daß die Construction der Drucklinie von dem Prinzip ausging, daß der Fugendruck auf die m^{te} Fuge vom Scheitel aus sich bestimmt als Gegenresultante aus den Gewichten der m Gewölbotheile zwischen dem Scheitel und der Fuge und dem Scheiteldruck; nun ergibt sich aber die Lage der Resultante jener m Gewichte ebenso wie die des Gesamtgewichts aus dem ersten Seilpolygon,

aus dem Schnittpunkt der Anfangsspannung H' mit der nun als Endspannung auftretenden Seilspannung an der Grenze der m^{ten} Lamelle; es ergeben sich auf diese Weise der Reihe nach die Punkte J', K', L' .

Die zwei Seilpolygone haben dieselben Belastungen; es schneiden sich also nach einem Satz über das Seilpolygon je zwei entsprechende Spannungen auf einer Verticalen und man erhält hiernach J, K, L, D aus J', K', L', C . Man verbindet der Reihe nach, von M ausgehend, die Punkte L, K, J mit den Schnittpunkten M, N, O der Schwerlinien der Lamellen auf dem mit R beginnenden zweiten Seilpolygon und erhält wie oben die Punkte Q, F, E der Drucklinie.

§. 9.

Bestimmung des Druckes auf eine radiale Gewölbefuge.

Ist auf die in §. 8 angegebene Weise der

Druck R_1 auf eine verticale Gewölbefuge AB gefunden, so kann der Druck gegen eine radiale Fuge AC bestimmt werden, indem man im Kräfteplan die der Fläche F , entsprechende Kraft Q , vermindert um eine dem ΔABC entsprechende Kraft g ; hierdurch erhält man GröÙe und Richtung und wenn

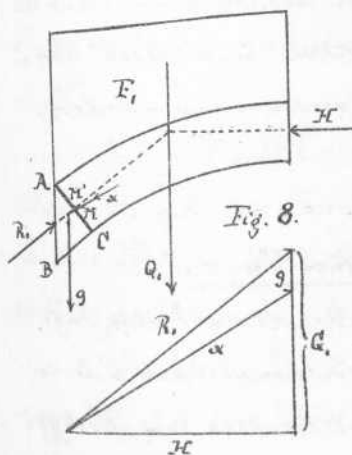


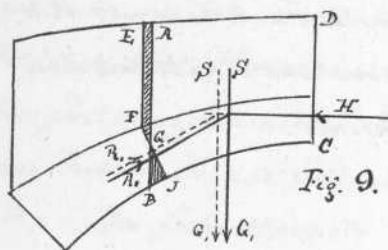
Fig. 8.

man im ΔABC durch den Schnittpunkt von R_1 und g eine

Parallele mit x zieht, den Angriffspunkt M des Fugen-Drucks auf AC , welchen ein Punkt der genauen Drucklinie ist. — Man findet, daß der Punkt M von dem Schnittpunkt M' der Kraft R mit der radialen Fuge so wenig abweicht, daß man die Differenz in den meisten Fällen vernachlässigen kann.

Eine andere Correction ist die folgende:

Zieht man für den durch die verticale Fuge AB begrenzten Gewölbeheil $ABCD$ eine radiale Gewölbfuge so, daß $ETGA = BGJ$, so ändert sich im Kräfteplan nichts,



die radiale Fuge hat denselben Druck aufzunehmen, wie die verticale, nur wird die Lage von Q , und von R , eine etwas andere, indem der Schwerpunkt der

Fig. 9.

Fläche sich von CD entfernt. Die Drucklinie und damit der Angriffspunkt auf der radialen Gewölbfuge nimmt eine etwas höhere Lage ein. Die Änderung ist aber so gering, daß sie in der Regel vernachlässigt werden kann; nur bei Gewölben mit großem Centriwinkel muß diese Correction in der Nähe des Kämpfers vorgenommen werden.

§. 10.

Druckvertheilung in einer Fuge.

Um die Vertheilung des Druckes auf eine Fuge zu ermitteln, zerlegt man den Fugen-Druck nach §. 3 in die Componenten N und T , welche letztere vom Reibgswiderstand aufgehoben werden muß (§. 3.).

des Fugendrucks soll daher immer im mittleren Drittel der Fuge liegen und außerdem darf die in der Fuge auftretende Maximalanspruchnahme nicht größer als die zulässige sein.

Die Anspruchnahme für Steinmaterial wird in der Regel durch die Druckhöhe angegeben, das heißt durch die Höhe eines Mauerprismas aus dem betreffenden Material, welches seine Basis ebenso stark belastet wie den angegebene Fugendruck; die Druckhöhe ergibt sich also durch Division des Druckes pro Flächeneinheit der Fuge durch das spezifische Gewicht des Materials (Kap. III, §. 20.) .

Tabelle der Druckhöhen und spezifischen Gewichte. (nach Hänel u. A.)

Material	Spec. Gew.	Bruchbelastg. Druckhöhe in met.		Zul. Belastg. Druckhöhe
Ordin. Bruchsteingemauer.	2,0	—	—	30 ^{m.}
Ordin. Quadrigemauer.		—	—	50
Gutes " "	2,5	—	—	100
Bestes " "		—	—	150
Basalt	2,8	4500-4000	1200-2000	
Granit	2,6	1600-2700	400-700	
Sandstein	2,3	220-3500	50-800	
(Keuper	2,28	1220	280	
Lias	2,25	1580	355	
Kalkstein	2,5	240-2400	60-600	
(Weils. Jura	2,34	1770	415	
(Diluvial. Kalktuff }	2,36	1100	260	
Muschelkalk	2,65	1620	430	
Lehm- u. Sandboden	—	—	—	20-30 ^{m.}
Fester Thon- u. Mergel	—	—	—	30-50
Felsboden	—	—	—	50-150
Baustein	1,8	220-800	40-150	
gewöhnl. Kalkmörtel	1,5	200	30	
Bester Cementmörtel		1000	150	

§. 11.

Günstigste Drucklinie (§. 5.) und zweck-
mässigste Gewölbeform.

1. Gegeben Form und Belastung eines Gewölbes, gesucht die Gewölbestärke.

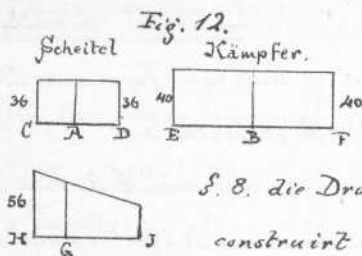
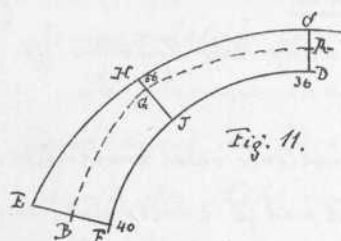
Ist nach §. 8. eine Drucklinie unter zweckmässiger Annahme der Angriffspunkte A und B construiert, so wird für diejenigen Fugen, in welchen die Maximalanspruchnahme die grössten Werthe erreicht, d. h. die „Bruchfugen“, die Drucklinie nach §. 10 construiert.

Diese Bruchfugen sind in der Regel die Kämpfer- und Scheitelfuge und eine, selten zwei weitere Fugen, in welchen die Drucklinie der Leibung oder dem Rücken am nächsten kommt.

Ergeben sich jene grössten Maximalanspruchnahmen erheblich verschieden, so muß die Drucklinie durch Wahl anderer Angriffspunkte A' und B' neu construiert und so verschoben werden, daß in allen Bruchfugen die Maximalanspruchnahme annähernd gleich wird; als dann wird, wenn diese gemeinsame Maximalanspruchnahme $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{größer} \\ \text{kleiner} \end{smallmatrix} \right\}$ als die zulässige Inanspruchnahme des Gewölbe materials sich herausstellt, die Gewölbestärke $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{vergrößert} \\ \text{verkleinert} \end{smallmatrix} \right\}$, bis eine solche Übereinstimmung von Drucklinie und Maximalanspruchnahme erzielt ist, daß letztere in allen Bruchfugen annähernd gleich der zulässigen wird, was mit einiger Übung schon bei einer zweiten Drucklinie nahe genug erreicht wird.

Ein erstes und meist genügendes Annäherungsergebnis zur Beurtheilung der Stabilität des Gewölbes liefert

das arithmet. Mittel der Maximalanspruchnahmen der Bruchfugen. Es sei z. B. für das Gewölbe Fig. 11 nach



§. 8. die Drucklinie
construirt und für

die Bruchfugen EF, CD, HJ haben sich nach §. 10. die in den Figuren 12 angegebenen Druckvertheilungen, also für die Punkte F, D, H bzw. die Maximaldruckhöhen 40^m , 36^m , 56^m ergeben, so muß die Drucklinie nach innen verschoben worden. — Ist nun die zulässige Druckhöhe = 50^m , so wird, ehe zur Construction der neuen Drucklinie geschritten wird, die Gewölbestärke besonders im Scheitel etwas verringert, da das arithmet. Mittel der drei Maxima = 44 ist, und die Angriffspunkte A und B etwas gegen die Leibung gerückt.

Will man genauer verfahren, so nimmt man obiges Mittel in den Punkten D und F als gefährlichste Spannung einer neuen Drucklinie, bestimmt hierzu nach den

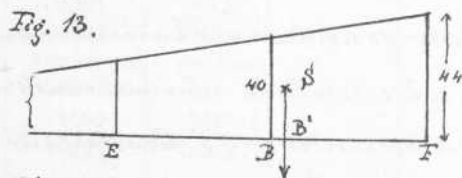
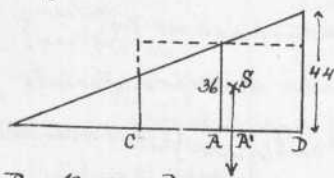


Fig. 13. die Angriffspunkte A' und B' von Scheitel u. Kämpferdruck, construirt hiefür die Drucklinie, welche andere Maximaldruckhöhen gibt; haben diese noch nicht den richtigen Werth, so wird das Verfahren wiederholt und endlich die günstigste Drucklinie gefunden.

2. Für gegebene Spannweite und Belastung soll

ein Gewölbe von zweckmäßigster Form construiert werden.

Am günstigsten ist die Drucklinie für ein Gewölbe offenbar, wenn sie mit der Mittellinie des Gewölbes zusammenfällt, da alsdann der Druck in allen Fugen gleichmäßig vertheilt ist; eine solche Drucklinie ist aber im allgemeinen bei gegebener Belastung nur dann möglich, wenn man die Gewölbeform (Leibung und Rücken) beliebig der Drucklinie anpassen kann, oder wenn man bei gegebener Gewölbeform die Belastung beliebig wählen und so über den Längenschnitt des Gewölbes vertheilen kann, daß die Drucklinie dadurch der Mittellinie des Gewölbes entspricht.

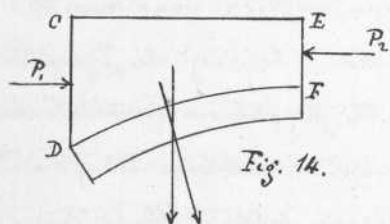
Im ersten Falle wird man für eine nach practischem Gefühl oder Beispielen gewählte Gewölbeform eine der günstigsten Drucklinie nahekommende Drucklinie construiren und dann mittelst verschiedenen Radien die Gewölbeform dieser Drucklinie als der Mittellinie des Gewölbes anpassen; für diese neue sogen. zweckmäßigste Gewölbeform bestimmt man die erforderliche Stärke derart, daß die Inanspruchnahme in allen Fugen sich gleichmäßig vertheilt und gleich der zulässigen wird.

Im zweiten Falle kann auf graphischem Wege nur ein mehrfaches Probiren mit veränderter Belastung annähernd zum Ziele führen, oder aber man wählt ein analytisches Verfahren, bei welchem eine Relation zwischen der Form der Drucklinie u. der Art der Belastung aufgestellt wird (siehe §. 15, 2).

§. 12.

Modificationen der Drucklinie.1.) Durch die Überschüttung.

Die Voraussetzung §. 2, daß alle seitlichen Pressungen in einem Verticalschnitt der Überschüttung sich aufheben,



die Belastungen also nur vertical wirken, gilt nur für Überschüttung über horizontalen Spandrels und für Steinbeugung, nicht aber für ge-

wöhnliche Erdschüttung, indem nach der Theorie des Erddrucks immer eine Horizontalkraft $P = P_1 - P_2$ vorhanden sein muß, wenn (Fig. 14.) $CD > EF$.

Ein Maximum dieser Kraft P würde eintreten, bei reibungslosem Füllmaterial, wo die Belastung normal zum Gewölberücken wirkt (siehe §. 13.). Die Richtung der Belastung schwankt also zwischen der verticalen und der zum Gewölberücken normalen, ist aber nicht genau bestimmbar, da der Reibungscoefficient von Zufälligkeiten abhängig ist; so lange man also nicht sichere Anhaltspunkte über die Richtung der Belastung hat, nimmt man dieselbe meist vertical an.

2.) Durch die Hintermauerung.

Wenn in Folge ungünstiger Lage der Drucklinie eine Kippbewegung im Gewölbe eintritt, so entstehen längs des Gewölberückens und der Lagerfugen der Hintermauerung Reibungswiderstände, welche die Drucklinie beeinflussen, deren Größe aber ebenfalls unbe-

stimmbar ist. Die Art und Weise des Einflusses jener in den Lagerfugen auftretenden horizontalen Widerstände läßt sich jedoch erkennen.

Faßt man die Drucklinie als Seilpolygon auf, dessen Belastungen den Gewichten des Gewölbes entgegengesetzt wirken und bringt man nun die genannten Horizontalwider-

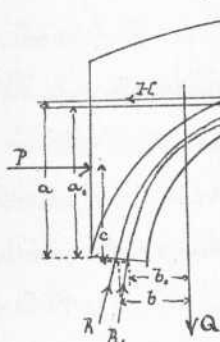


Fig. 15.

stände ebenfalls in entgegengesetzter Richtung an, so sieht man, daß die neue Drucklinie gegen die alte nach oben abweicht und nach dem Folgenden im allg. meinen eine günstigere ist.

Wirken nur vertikale Kräfte, so ist $H = Q \cdot \frac{b}{a}$; wirkt noch eine horizontale Kraft P , so ist

$$H_1 = P \frac{c}{a_1} + Q \frac{b_1}{a_1} \quad \text{wo ungefähr}$$

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b}{a}, \quad \text{also}$$

$$Q \cdot \frac{b_1}{a_1} = Q \cdot \frac{b}{a} \quad \text{somit } H_1 > H \text{ und}$$

zwar um $P \cdot \frac{c}{a_1} < P$; aus dem Kräfteplan ergibt sich dann, daß R_1 kleiner und steiler ist als R .

Eine Berücksichtigung der günstigen Einwirkung dieser Horizontalkräfte erlaubt man sich häufig, z.B. bei Halbkreisgewölben dadurch, daß

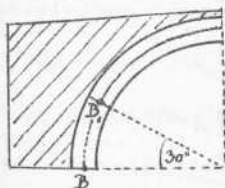


Fig. 16.

man die Drucklinie im unteren Bogenanschnitt außer Acht läßt, indem man annimmt, daß sie durch die Hintermauerung dort in günstiger Lage erhalten wird.

§. 13.

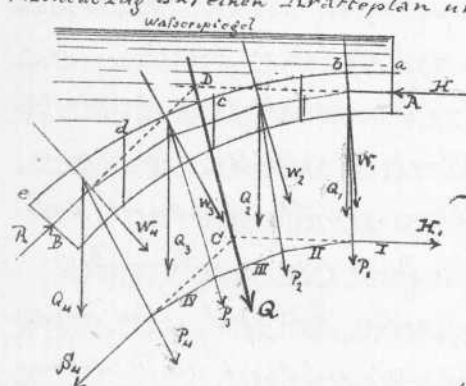
Berechnung eines Gewölbes bei
schiefer Belastung.

Beispiel. Es sei ein Stichtbogensgewölbe (Fig. 17.) unter Wasser durchzuführen und es soll dessen Stärke ermittelt werden.

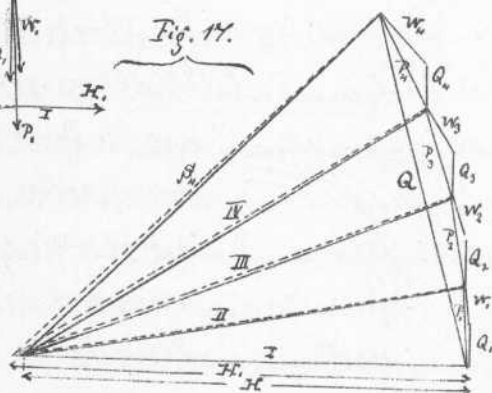
Man theilt das Gewölbe wieder in senkrechte Lamellen und bestimmt die Gewichte $Q, Q_2 \dots$ derselben bei 1^{te} Tiefe, alsdann werden die Wasserdrücke $W_1, W_2, W_3 \dots$ auf die Gewölberückentheile ab, bc, cd, \dots nach bekannten hydrostatischen Sätzen ermittelt; die Lage der Resultanten derselben bestimmt sich 1.) aus der Bedingung, daß der Wasserdruck normal zu der Rückenfläche wirkt und

2.) daß er im soden. Druckmittelpunkt angreift.

$W_1, W_2, W_3 \dots$ setzt man mit den Gewichten $Q, Q_2, Q_3 \dots$ zu den Resultanten $P_1, P_2 \dots$ zusammen und construirt aus diesen Resultanten als Belastungen mit beliebig gewähltem H_0 horizontalzug H , einen Kräfteplan und ein Seilpolygon zur Bestimmung der Resultante Q sämtlicher Außen-



Kräfte; alsdann erhält man wie früher unter



Annahme der Angriffspunkte A und B von Scheitel- und Kämpferdruck durch Parallelen zu AD und BD im Kräfteplan H und R und kann dann die Drucklinie als Seilpolygon mit den Kräften $P_1, P_2 \dots$ und mit dem nun gefundenen Horizontalzug H zeichnen. Die übrigen Operationen bleiben dieselben. - Es werden wieder die Maximalanspruchnahmen der Bruchfugen ermittelt, und je nach Erfund (S. H.) die Gewölbestärke geändert.

NB. Die Gewölbegewichte und Wasserdrücke müssen natürlich auf dieselbe Einheit (hier am besten das Wassergewicht) reducirt sein.

b.) Analytische Methode.

S. 14.

Aufstellung der Hauptgleichungen.

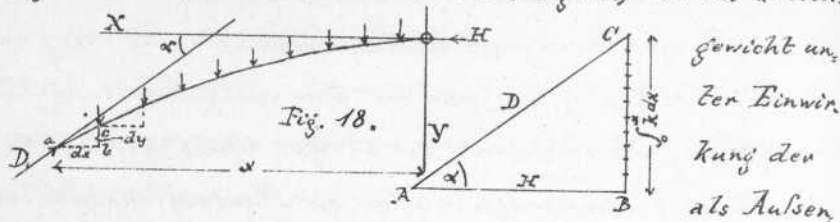
Der analytischen Methode liegen ganz dieselben Betrachtungen zu Grunde wie der graphischen. Alles über die Belastung, das Eigengewicht und die Drucklinie in S. 7 und 8 Gesagte gilt auch hier.

Wir fassen also die Drucklinie, welche zur Darstellung der Gleichgewichtszustände im Gewölbe dient, auf als ein Seilpolygon (bezw. Seilcurve) mit Druckspannungen, welches aus den durch die Ordinaten h' der reducirten Belastungsfläche dargestellten Belastungen

$$h \cdot dx = h' \cdot g \cdot dx \quad \text{mit dem Horizontalschub als}$$

Horizontalzug construirt ist.

Ein am Scheitel und einem beliebigen andern Punkt abgetrenntes Stück der Drucklinie (Fig. 18.) ist im Gleich.



kräfte (tangentiell an die Curve) angebrachten Spannungen H und D und der Belastungen $\int k \cdot dx$; aus der Ähnlichkeit von $\triangle ABC$ und abc ergibt sich

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\int_0^x k \cdot dx}{H}, \text{ woraus } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{k}{H}; \text{ andererseits}$$

$$\frac{dy}{dx} = \tan \alpha$$

Nun ist die Gleichung des Krümmungsradius einer Curve

$$f(x, y) \text{ allgemein } Q = \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}, \text{ also hier für}$$

$$\text{die Druckcurve } Q = \frac{(1 + \tan^2 \alpha)^{3/2}}{k/H} \text{ oder}$$

$$(1.) \quad Q = \frac{H}{k \cos^3 \alpha}; \quad \text{für } \alpha = 0, \text{ d. h. im}$$

Scheitel wird der Krümmungsradius

$$(2.) \quad Q_0 = \frac{H}{k_0}, \text{ also}$$

$$(3.) \quad H = Q_0 \cdot k_0, \text{ wo } k_0 \text{ die Belastung pro Längs}$$

Geneinheit im Scheitel. Diesen Werth von H in Gl. (1.) eingesetzt und diese nach k aufgelöst gibt die Belastungshöhe in einem beliebigen Punkt

$$(4.) \quad k_x = \frac{k_0 \cdot Q_0}{Q_x \cdot \cos^3 \alpha} \quad \text{Ferner berechnet sich}$$

die Scheitelstärke d_0 , wenn S die zulässige Inanspruchnahme des Gewölbematerials, aus

$$S = \frac{H}{d_0}; \text{ hieraus nach Gl. (3.)}$$

$$(5.) \quad d_0 = \frac{Q_0 \cdot k_0}{S}$$

Soll die Inanspruchnahme im Gewölbe überall gleich sein, so ergibt sich die Stärke an einem belieb. Punkt, wo

fern die Belastung der Theorie gemäß über das Gewölbe vertheilt werden kann, aus $d = \frac{D}{S}$, wo D der betreffende Fugendruck; aber aus dem Kräfteplan ist

$$D = \frac{H}{\cos \alpha} = \frac{Q_0 K_0}{\cos \alpha}, \text{ somit}$$

$$(6.) \quad \bar{d}_x = \frac{\bar{d}_0}{\cos \alpha}; \text{ d.h. die Projection jeder Fuge auf eine Verticale muß = der Scheitelfuge sein.}$$

Mit Hilfe der Gl. (1.) - (6.) läßt sich nun, wenn die Form der $\left\{ \begin{array}{l} \text{Stützlinie} \\ \text{Belastungsfläche} \end{array} \right\}$, d.h. die Werthe von $\left\{ \begin{array}{l} Q \\ K \end{array} \right\}$ gegeben sind, die $\left\{ \begin{array}{l} \text{Belastung} \\ \text{Stützlinie} \end{array} \right\}$ des Gewölbes und seine Stärke bestimmen.

Zur Vereinfachung berechnet man die Werthe von

$\frac{1}{\cos^3 \alpha}$ ein für allemal:

$\alpha =$	0	5°	10	15	20	25	30	35	40
$\frac{1}{\cos^3 \alpha} =$	1,000	1,012	1,047	1,110	1,205	1,343	1,540	1,819	2,225
$\alpha =$	45	50	55	60	65	70.			
$\frac{1}{\cos^3 \alpha} =$	2,828	3,765	5,299	8,000	13,248	24,994.			

§. 15.

Construction der Drucklinie oder der Belastungsgrenze nach §. 14.

1.) Gegeben die Belastungen und die Form des Gewölbes; gesucht dessen günstigste Stützlinie zur Bestimmung der Dimensionen des Gewölbes.

Man berechnet zunächst mit beliebig angenommenem H die Werthe von Q für die gegebenen K aus Gl. (1.) mit obiger Tabelle; sodann construirt man in der unten anzugebenden Weise eine Seilcurve aus diesen verschiedenen Q und schließlich bestimmt man die durch be

gehende Druckcurve haben, so verändert man die Ordinaten der Seilcurve im Verhältniß $\frac{f_1}{f'_1}$ oder $\frac{f_2}{f'_2}$. Hat man auf diese Weise eine Druckcurve bestimmt,

so ist das Verfahren zur Ermittlung der günstigsten Druckcurve und der Gewölbestärke ganz wie bei dem graphischen Verfahren (S. 11.)

2.) Gegeben die Gewölbeform; gesucht die zugehörige Belastungslinie für den Fall, daß die Drucklinie mit der Mittellinie des Gewölbes zusammen fallen soll.

Man berechnet wieder aus Gl. (2.) und (1.) zu

den gegebenen Krümmungsradien der Drucklinie, welche entweder aus der Gleichg. der Druckcurve oder durch Zeichnung gefunden werden, die Belastungshöhen, trägt sie über den entsprechenden Punkten der Druck-

curve als Ordinaten auf und erhält dadurch zunächst eine Belastungslinie, welche als secundäre bezeichnet wird; nun rechnet man die

Scheitelstärke aus Gleichg. (5.) und die, jenen der übrigen Fugen aus Gleichg. (6.) oder

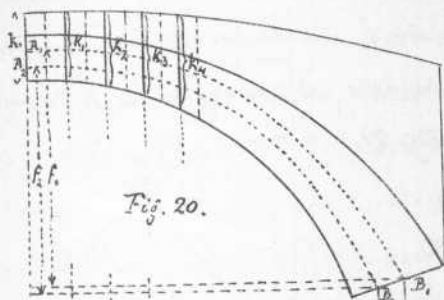
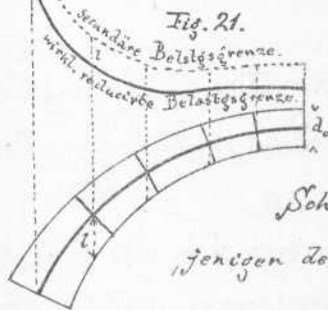


Fig. 20.



Fig. 21.



graphisch nach dem zu Gleich. (6) Gesagten; alsdann trage man die halben Fugenstärken auf den betreffenden Radien über und unter der Stützlinie, und die zwischen Drucklinie und Leibung liegenden Stücke l der Ordinaten von der secun-
dären Belastungsgrenze abwärts ab, so ergibt sich die wirk-
liche Belastungsgrenze. (Fig. 21.)

§. 16.

Form der Belastungsgrenze.

Die Belastungslinie steigt in der Nähe des Kämpfers rasch gegen oben, während sie andererseits vom Schei-
bel aus langsam steigen oder erst fallen und dann rasch stei-
gen kann. — Es ist manchmal von Interesse den tiefsten
Punct derselben zu finden; dieser bestimmt sich wie folgt:
(Krümmungsmittelpunct O Coordinatenursprung)

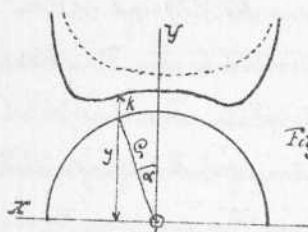


Fig. 22.

$$y = \varphi \cos \alpha + k = \varphi \cos \alpha + \frac{k_0}{\cos^3 \alpha};$$

der tiefste und höchste Punct ergibt
sich mit

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{dy}{d\alpha} = -\varphi \sin \alpha + \frac{3k_0}{\cos^4 \alpha} \cdot \sin \alpha \\ &= \sin \alpha \left\{ -\varphi + \frac{3k_0}{\cos^4 \alpha} \right\}, \text{ also} \end{aligned}$$

y ein Maximum oder Minimum 1) wenn $\alpha = 0$ und

$$2) \text{ wenn } \cos \alpha = \sqrt[4]{\frac{3k_0}{\varphi}}$$

Ist $\varphi \geq 3k_0$, so ist die Belastungsgrenze stets
nach oben concav; der tiefste Punct liegt über dem Scheitel.

Specielle Fälle.

1.) Die Drucklinie hat Kreisbogenform; zu bestimmen
die Gewölbstärke und die Belastungsgrenze, Gl. (4) lautet:

$$k_u = \frac{k_0 \varphi_0}{\varphi_u \cos^3 \alpha}; \text{ es ist aber hier } \varphi_u = \varphi_0, \text{ somit}$$

$K_x = \frac{K_0}{\cos^3 \alpha}$; ferner (Fig. 23.) $r = \rho_0 - \frac{d_0}{2}$; die Construction von K_x siehe Fig. 23.

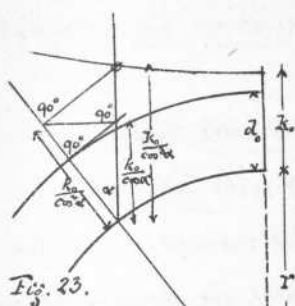


Fig. 23.

Modification von diesem Punkt

zu angenommen, durch die Praxis gegebenen Belastungen die Drucklinie und die Gewölbstärke bestimmt wird. Die Dimensionen des Gewölbes bestimmen sich also bis zur Grenze $\alpha = \psi$ nach Gl. (5) und (6); von dort ab nach dem bei Bestimmung der günstigsten Drucklinie (S. 11.) Gesagten.

2.) Die Drucklinie ist ein Korbboogen (Fig. 24).

Hier gilt für den mit dem Scheitelradius beschriebenen Theil der Druckcurve alles Bisherige (Fall. 1.); für die folgenden Theile der Druckcurve findet Gl. (4.) Anwendung:

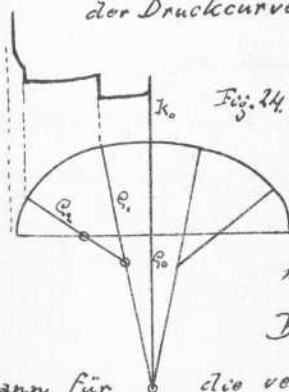


Fig. 24.

$$K_x = \frac{K_0 \rho_0}{\rho_w \cos^3 \alpha}$$

Die Bestimmung der Gewölbe-

stärke geschieht wieder nach Gl. (5) und (6). Auch hier muß

man in Wirklichkeit oft eine andere Belastungsweise anwenden und hat

dann für die veränderte Belastung noch die Stabilität des Gewölbes zu untersuchen.

3.) Die Drucklinie ist eine Ellipse.

Hier ist, wenn w die Spannweite, f die Wellhöhe der Drucklinie ist,
ist,

$$Q = \frac{2f^2}{w} \left\{ \frac{1 + \frac{4}{3} \frac{x^2}{f^2}}{\left(\frac{2f}{w}\right)^2 + \frac{4}{3} \frac{x^2}{f^2}} \right\}^{\frac{3}{2}} \quad \text{und}$$

$$Q_0 = \frac{w^2}{4f}$$

Die Berechnung geschieht nach

Gleichg. (4.) bis (6.).

4.) Die Drucklinie ist eine Parabel.

Es ist nach S. 14.

$$K = H \cdot \frac{d^2 y}{dx^2}$$

Nun ist die Gleichg. der Drucklinie in Beziehung auf die durch den

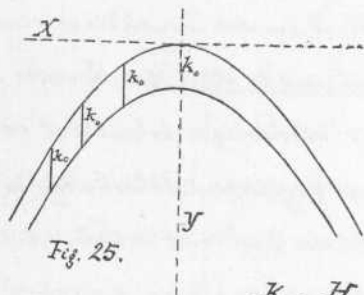


Fig. 25.

Scheitel der Belastungslinie gezogenen Achsen

$$x^2 = 2p(y - k_0), \text{ also}$$

$$y = \frac{x^2}{2p} + k_0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{p}; \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{p}, \text{ also}$$

$$K = \frac{H}{p}$$

constant.

Es müssen daher sämtliche Belastungshöhen gleich sein; ein parabelförmiges Gewölbe fordert eine in horizontalem Sinn gleichmäßige Belastung.

5.) Für eine gebrochen gerade Drucklinie ist

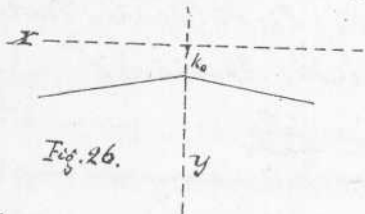


Fig. 26.

die Gleichg.

$$y = Mx + k_0$$

$$\frac{dy}{dx} = M; \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = 0, \text{ also}$$

$$K = 0;$$

bei gerader Druck-

linie sind zwischen Scheitel und Kämpfern keine Belastungen vorhanden.

C.

Berechnung der Widerlager und Zwischenpfeiler.

§. 17.

Widerlager.

Auf ein Widerlager wirken folgende Kräfte:

1. der Kämpferdruck R , welcher aus der Berechnung des Gewölbes bekannt ist;
2. das Gewicht und die Belastung Q des Widerlagers, wobei die Grenze zwischen Gewölbehintermauerung und Widerlager durch eine durch den Rückenpunkt der Kämpferfuge gehende Verticale bestimmt ist.
3. der seitliche Erddruck P ;
4. der Widerstand des Grundes.

Ein Widerlager kann nun zerstört werden:

- 1.) durch Gleiten in den Lagerfugen.
- 2.) durch Zerdücken des Materials
- 3.) durch Umkippen.

1.) Die Gefahr des Gleitens ist am größten in den Lagerfugen, welche am Kämpfer liegen, denn hier ist Q sowohl als P kleiner als für jede tiefer liegende Fuge, während R für alle Fugen gleich gegen Gleiten ist vorhanden, R_{II} aus dem Erddruck P gegen ba , dem Gewichte Q von $abcde$ und dem Kämpfer:

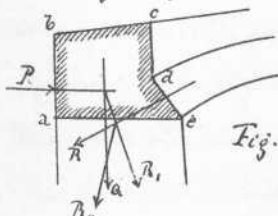
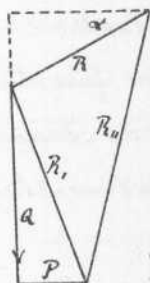


Fig. 27.



druck R einen Winkel mit der Normale der Fuge ae macht, der kleiner ist als der Reibungswinkel, der gewöhnlich zwischen 20 und 30° angenommen wird.

Da die Lage von R_n ungünstiger wird, wenn der Erddruck = 0 ist, so ist es sicherer, diese Untersuchung ohne Rücksicht auf den Erddruck zu machen.

Bemerkg. Die Reibung wird oft künstlich vergrößert durch Rollschichten, Verdollung etc. oder ordnet man die Fugen normal zu R_1 an; in diesem Fall theilt man das Widerlager in Streifen nach Fig. 28 ein und construirt eine Fortsetzung der Drucklinie, indem man die Erddrücke und Widerlagergewichte für jeden Theil ermittelt und nacheinander mit $R, R_1, R_n \dots$ zusammensetzt.

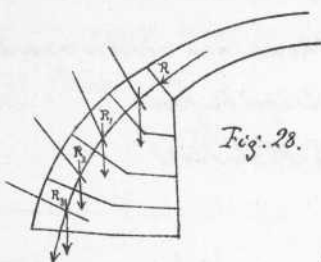


Fig. 28.

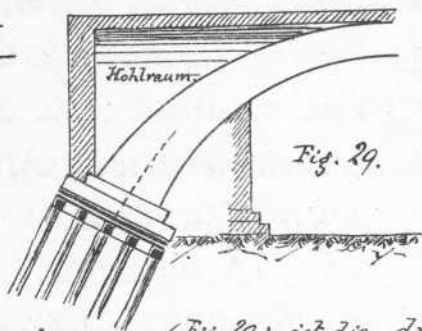


Fig. 29.

Eine dritte Anordnung (Fig. 29.) ist die, daß man das Gewölbe bis zum Fundament fortführt und nur ein senkrechtes Verkleidungswiderlager ausführt; in diesem Fall wird eine besondere Berechnung für das Hauptwiderlager nicht nöthig, sondern man führt einfach die Berechnung des Gewölbes mit der Drucklinie bis zur Fundamentfuge aus.

2.) Die Gefahr des Zerdrückens ist in der Fundamentfuge am größten, da hier Q ein Maximum. Es wird wie,

der P , Q und R zu R_2 zusammengesetzt und für die Fundamentfuge die Druckvertheilung der Normalcomponen-
te von R_2 ermittelt; je nach Erfund muß das Widerlager brei-
ter oder schmaler angeordnet werden, wobei das bei der Berech-
nung der Futtermauern (Kap. III Beispiel S. 132.) angegebene
Verfahren angewendet werden kann.

Ein anderes Verfahren ist das folgende: man
führt statt des Kämpferdruckes R einen Druck R_3 ein, den
sich aus R und dem Horizontalschub H des Gewölbes zu-
sammensetzt und nimmt das Widerlager als genügend sta-
bil an, wenn die Resultante R_2 aus Q und R_3 durch die
äußere Fundamentkante geht; dabei zerlegt man das Wider-

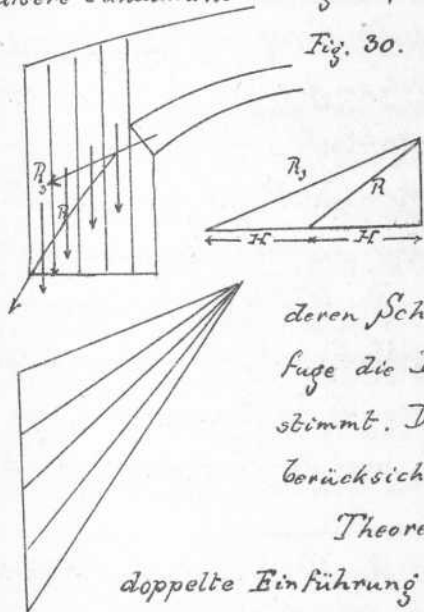


Fig. 30.

lager in verticale Lamel-
len und construirt aus
deren Gewichten und R_3
mittels eines Kräftepo-
lygons eine Drucklinie,

deren Schnittpunkt mit der Fundament-
fuge die Breite des Widerlagers be-
stimmt. Der Erddruck ist hierbei nicht
berücksichtigt.

Theoretischer bestimmt man ohne
doppelte Einführung von H die Widerlagerstärke
derart, daß man den Kämpferdruck R mit den Gewichten
der Verticallamellen zusammensetzt und die Sicherheit

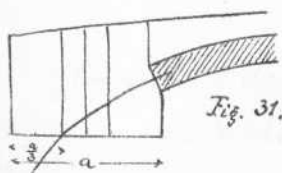


Fig. 31.

als genügend annimmt, wenn die Druck-
linie in $\frac{1}{3}$ der Fundamentbreite trifft
(Kap. III; S. 131, c) und dabei die

Maximalinanspruchnahme gleich der zulässigen Inanspruchnahme des Baugrundes wird. (Auch hier ist der Erddruck nicht berücksichtigt).

Bei hohen Widerlagern (Ontpfählern) kann übrigens bei Berücksichtigung des Erddrucks die Maximalinanspruchnahme in einer andern als der Fundamentfuge

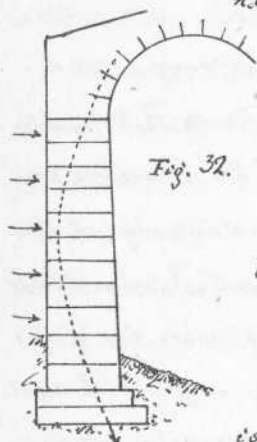


Fig. 32.

auftreten und muß dann für mehrere Fugen die Druckvertheilung ermittelt werden, wobei man eine Drucklinie erhält, welche ein Bild der Druckvertheilung giebt (Fig. 32.)

3.) Die Gefahr des Umkippens

ist gewöhnlich am größten für die äußere Fundamentkante; bei hohen Pfeilern mit starkem Erddruck kann das Um-

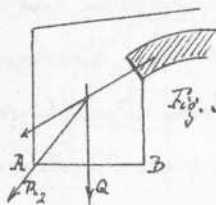


Fig. 33.

Kippen auch um die innere Kante stattfinden. Das Widerlager ist abgesehen von der Materialfestigkeit jedenfalls so lange im Gleichgewicht gegen Kippen als die Resultante R_2 aus Q und R , bzw. Q, P und R noch die Fundamentfuge AB zwischen A und B trifft.

NB. Es muß in der Regel die Stabilität eines Pfeilers mit und ohne Einwirkung des Erddrucks berechnet werden, da oft die Hinterfüllung erst nach Vollendung des Bau es stattfindet.

§. 18.

Pfeiler.

Ein Mittelpfeiler ist am ungünstigsten in Anspruch genommen, wenn eine Öffnung möglichst wenig (nur Eigengewicht), die andere möglichst stark (Bülgengewicht

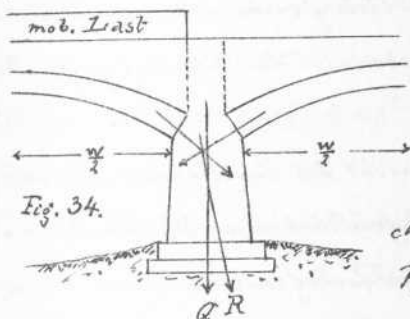


Fig. 34.

und mobile Belastung) belastet ist; man setzt die mit diesen Belastungen entstehenden Kämpferdrücke mit dem Bülgengewicht des Pfeilers zusammen und bestimmt

nach den gleichen Principien wie bei den Ortpfeilern (und Futtermauern, Kap. III.) die Stärke oder Form.

Bei Viaducen mit vielen Öffnungen werden zuweilen mit Rücksicht auf den etwaigen Einsturz einer Öffnung ein oder mehrere sogen. Wüsterlagspfeiler angeordnet, welche so stark construirt werden, daß sie dem einseitigen Schube eines Gewölbes widerstehen können. Die Berechnung geschieht wie die der gewöhnl. Mittelpfeiler, aber unter Annahme eines einzigen Kämpferdrucks, wobei jedoch eine größere Inanspruchnahme zulässig ist.

D.

Lehrgerüste.

§. 19.

Bestimmung des Normaldrucks auf d. Lehrgerüste.

Die Belastung eines Lehrgerüsts wird durch

das Gewölbe allein hervorgebracht, da die Hintermauerung derart ausgeführt wird, daß eine Belastung des Lehrgerüsts durch dieselbe nicht stattfindet.

Auf einer gewissen Strecke BC ist das Gewölbe vermöge des Reibungswiderstandes in den Fugen für sich im Gleichgewichte, bedarf also dort eigentlich gar keines Lehrgerüsts, in einem andern Theil AC aber übt das Gewölbe einen Druck auf das Lehrgerüste aus.

Ist nun g , das specif. Gewicht des Gewölbematerials, und f , der Reibungscoefficient der Fugenflächen, so ist der Normaldruck pro Flächeneinheit des Lehrgerüsts

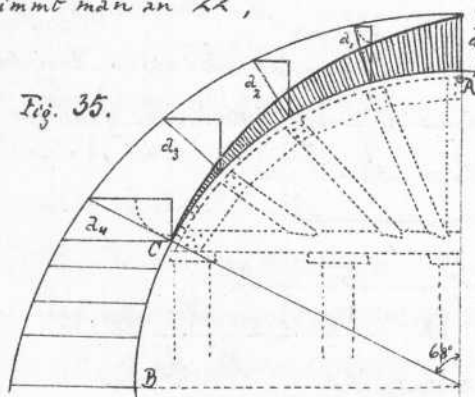
$$n = g \cdot d (\cos \alpha - f \sin \alpha) \text{ oder wenn nach S. 14, 6}$$

$$d = d_0 \sec \alpha \quad n = g \cdot d_0 \{1 - f \tan \alpha\}$$

Der Ausdruck $z = d \{ \cos \alpha - f \sin \alpha \} = d \sec \alpha \{1 - f \tan \alpha\}$ stellt die centrale Druckhöhe dar, welche also für

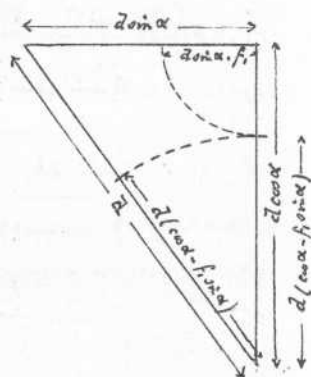
$f \tan \alpha = 1$ oder $\tan \alpha = \frac{1}{f}$ gleich 0 wird. Als kleinsten Reibungswinkel von Stein auf Stein nimmt man an 22° , also beträgt der Centriwinkel, bis

Fig. 35.



zu welchem überhaupt Lehrgerüste nöthig sind, $2\alpha = 2(90 - 22) = 136^\circ$

für $\alpha = 68^\circ$ ergibt sich aus $\tan \alpha = \frac{1}{f}$ $f = 0,4$



also $Z = d \cos \alpha (1 - 0,4 \lg \alpha)$

Tabellen für $\{1 - 0,4 \lg \alpha\}$ (nach Heinzenling.)

a.) von $1,5^\circ$ ausgehend:

$\alpha = 0^\circ$	1,5	17,5	27,5	37,5	47,5	57,5	ca. 68
$1 - 0,4 \lg \alpha = 1,000$	0,947	0,874	0,792	0,693	0,563	0,372	0,000

b.) von 10° ausgehend:

$\alpha = 0^\circ$	10	20	30	40	50	60	ca. 68
$1 - 0,4 \lg \alpha = 1,000$	0,929	0,854	0,769	0,664	0,523	0,307	0,000

Die Druckhöhen können auch graphisch construirt werden, wodurch man ein Bild von der Druckvertheilung auf das Liehrgerüste erhält. Die in Fig. 35. schraffierte Fläche stellt die centrale Belastung dar.

Die Gewölbe werden häufig, soweit der Reibungswiderstand das Gleichgewicht erhält, mit horizontalen Fugen als Fortsetzung des Widerlagers aufgemauert.

E.

Allgemeine Formeln und Tabellen zur Berechnung der Gewölbe.

§. 20.

Formeln (für Metermaß).

1.) Vorschriften der Hannover'schen Bahn.

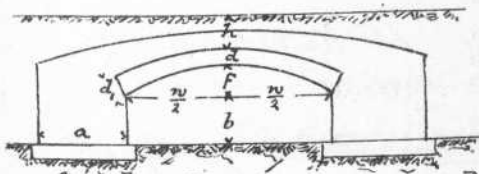


Fig. 36.

für Quader ist:

$$d = 0,2 + \frac{w}{12} \left\{ 93 + 904 \frac{w}{p} \right\}$$

$$d = 1,3 d$$

Beide Werthe sind für Back.

stein mit $(1 + \frac{1,2d}{1,8})$ zu multipliciren.

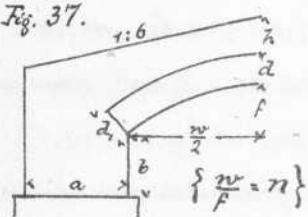
$$a = \sqrt{w} (0,6 + 0,1(\frac{w}{f} - 2) + 0,06b) + \frac{2w}{30} \quad \text{wobei}$$

$h \leq 10 \text{ m.}$; ist $h > 10 \text{ m.}$, so ist die Stärke

des Widerlagers: $a' = a + 0,017 w (h - 10)$

2.) Liesguillier (Ann. d. ponts et chaussées 1855).

Fig. 37.



$$d = \begin{cases} 0,2 \sqrt{w} + 0,1 & \text{f. Straßen} \\ 0,2 \sqrt{w} + 0,2 & \text{f. E. Bahn} \end{cases} \text{ Brücken.}$$

$$a = \sqrt{w} (0,6 + m(n-2) + 0,04b)$$

für Stichbogen $m = 0,10$

für Korbbogen $m = 0,05$

3.) Perronet.

$$d = \frac{5}{144} w + 0,32 \quad ; \quad \text{für } w > 24 \text{ m} \quad d = \frac{w}{24}$$

4.) Hütte.

$$a = \frac{w}{8} \cdot \frac{3n-1}{n+1} + \frac{b}{6} + 0,3$$

5.) Deutsches Bauhandbuch.

$a = \frac{w}{8} \cdot \frac{3w-f}{w+f} + 0,314 + \frac{b}{6}$ und für eine über dem Gewölbe liegende Dammschüttung von der Höhe h

$$a' = a + \frac{1}{12} h \quad \text{bis} \quad a + \frac{1}{6} h$$

Für Halbkreise und Stichbogen bis $f = \frac{1}{3} w$

$$d = 0,24 + \frac{w}{32} \quad \text{für Quadern}$$

$$d_1 = 0,24 + \frac{w}{16} \quad \text{für Backstein.} \quad \text{Bei einer}$$

Dammschüttung von der Höhe h über dem Scheitel ist die Scheitelstärke mit $(1 + \frac{h}{24})$ zu multipliciren.

$$d' = d \left\{ 1 + \frac{1}{24} h \right\}$$

6.) Henz. für Halbkreisgewölbe

$$d = \frac{w}{24} + 0,314.$$

7.) Schwarz. Brückengewölbe mit

$$f < \frac{w}{3} : \quad d = 0,24 + \frac{1}{65,25} \cdot \frac{Qw}{s.f} \quad , \quad \text{wo } Q \text{ das Gesamt}$$

gewicht einer Brückenhälfte nebst Belastung;

bei $f > \frac{w}{3}$ $d = 0,24 + \frac{1}{2175} \cdot \frac{Qw}{s \cdot f}$

8.) Käven.

$$d = 0,22 + (0,025 + 0,00333 \frac{w}{f}) \cdot w$$

$$a = \sqrt{w \{ 0,576 + 0,096 (\frac{w}{f} - 2) + 0,0616 \}} + \frac{w}{30}$$

9.) Halbkreisgewölbe unter sehr hoher Erdschüttung, unter Voraussetzung eines hydrostatisch wirkenden Drucks und Ersetzung des Gewölbegewichts durch das des vollen halben Endcylinders (Hänel).

$$d_1 = \frac{w \cdot h \cdot q}{2(s - h \cdot q)} \quad , \text{ wo } h \text{ Höhe der Erdschüttung vom Kämpfer aus ; } q \text{ spec. Gewicht der Erde.}$$

s zul. Transpruchn. des Mauermaterials.

§. 21.

Tabellen.

1.) Etzel für die Brennerbahn.

Bem. $h < 3 \text{ m.}$; a = Widerlagerstärke am Kämpfer.

w	Halbkreis			Stichbogen $\frac{w}{f}=4$			Verstärkung des Halbkreisgew. bei je 3m. Mehrüberschüttg.		
	\bar{d}	\bar{d}_1	\bar{a}	\bar{d}	\bar{d}_1	\bar{a}	\bar{d}	\bar{d}_1	\bar{a}
1,5	0,36	0,45	0,90	0,36	0,45	1,14	0,018	0,018	0,021
3	0,45	0,57	1,08	0,45	0,57	1,50	0,021	0,021	0,030
6	0,66	0,84	1,44	0,66	0,84	2,55	0,051	0,051	0,051
9	0,78	0,99	1,80	0,78	0,99	3,15	0,081	0,090	0,063
15	—	—	—	1,05	1,35	4,50	—	—	—
30	—	—	—	1,20	1,65	6,60	—	—	—

2.) Hänel. Empirische Tabelle.

\bar{d}	$\frac{w}{f}$ Eisenbahnbr. Straßenbrücke	
0,30	1 m.	1,5 m.

d	$\overbrace{\text{Eisenbahnbr.}}^w$	Straßenbr.
0,40	2	2,5
0,50	3,5	4,0
0,60	5,5	6
0,80	10	11
1,00	15	17
1,20	20	25
1,50	30	36
2,00	50	60

3.) Etzel. Schweiz. Central Bahn.

Tabelle für Durchlässe mit Halbkreisgewölben.

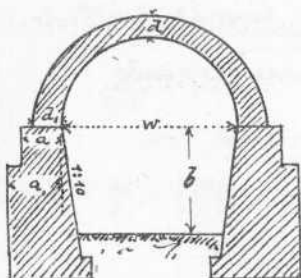


Fig. 38.

w	$b + \frac{w}{2}$	d	d_1	a	a_1
1,50	2,40	45 ^{cm}	55	75	75
2,00	2,90	47	60	90	90
3,00	3,80	51	70	1,0	1,0
4,0	4,50	58	80	1,0	1,2
5,0	4,80	66	90	1,2	1,4
6,0	5,10	74	1,0	1,3	1,6
7,0	5,20	82	1,1	1,45	1,75
8,0	5,20	90	1,2	1,6	1,9

TECHN. MECHANIK.

V. Kapitel.

Das

SEILPOLYGON

mit Anwendung auf
discontinuirliche Träger.

Herausgegeben
vom Ingenieur-Verein.
Polytechnikum Stuttgart.

1876.

THE NEW YORK PUBLIC LIBRARY

ASTOR LENOX TILDEN FOUNDATION

1009 Broadway, New York City

1914

Elemente zur
Berechnung von einfachen Trägern
mit Rücksicht auf ein ungleichmäßiges, mobiles Last-
system.

Bezeichnungen.

H = Horizontalzug eines Seilpolygons = Polldistanz eines Kräfteplans.

l = Länge eines in 2. Endpunkten unterstütz. Trägers.

M_x = Biegemom. (Kraftmoment) eines Querschnitts x .

M_{\max} = größtes Biegemoment eines Trägers.

$\max M_x =$ " " " in einem best. Querschnitt x eines Trägers.

P = Kraft, Einzellast

p = gleichmäßige Belastung pro Längeneinheit

Q = Auflagerdruck

u = Abscisse d. Querschn. vom Biegemom. M_{\max} bei fester Laststellung.

V_x = absch. Verticalkraft eines Querschnitts x .

V_{\max} = größte absch. Verticalkraft eines Trägers.

A. Seilpolygon.

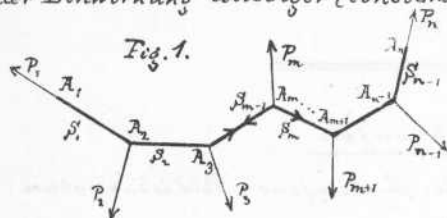
I.

Seilpolygon beliebiger Kräfte in einer Ebene.

§.1.

Definition des Seilpolygons.

Wird ein gewichtloses, vollkommen biegsames Seil der Einwirkung beliebiger (constanter) Kräfte (P_1, P_2, \dots, P_n) in der



Seilebene ausgesetzt, so nennt man die Gestalt, welche dasselbe annimmt, Seilpolygon.

Denkt man sich das Seil zu beiden Seiten eines Knotenpunktes A_m durchgeschnitten und die betreffenden Spannungen in den Seilstücken angebracht, so ist das abgeschnittene Stück im Gleichgewicht unter der Einwirkung der Kräfte P_m und der Seilspannungen S_{m-1} und S_m ; S_m stimmt also nach Größe und Lage mit der Resultante von S_{m-1} und P_m überein. Verfolgt man dieses Gesetz vom ersten Knotenpunkt A_1 an, so findet man, daß das Seilpolygon identisch ist mit dem Linienzug, in welchem der Reihe nach die Resultanten aller Kräfte P_1, P_2, \dots bis zum jeweiligen Knotenpunkt wirken.

Man bezeichnet deshalb diesen Linienzug mit dem Namen „Seilpolygon der Kräfte P_1, P_2, \dots, P_n “.

(vgl. Kap. II, §. 1, 3).

Bestimmungstücke eines Seilpolygons.

Ein Seilpolygon beliebiger Kräfte ist bestimmt durch 3 von einander unabhängige Bedingungen. Es können folg. Hauptfälle vorkommen:

1.) Gegeben die Anfangsspannung der Größe und Lage nach (s. §. 3.)

2.) Geg. die Anfangsspannung der Lage nach und ein Punkt, durch den das Seilpolygon gehen soll (s. Kap. IV, §. 2.)

3.) Geg. drei Punkte, durch die das Seilpolygon gehen soll (s. Kap. II, §. 8.)

§. 3.

Graph. Bestimmung der Mittelkraft geg. Kräfte.

Direct nach §. 1. ist die Endspannung S_n des Seilpolygons, welches die geg. Kräfte in beliebiger Reihenfolge verbindet,

gleich der gesuchten Mittelkraft nach Größe und Lage (s. Kap. II, §. 1. 3.).

Diese Construction ist nicht anzuwenden, wenn kein Schnittpunkt der Kraftlinien innerhalb des Zeichenblattes liegt.

Man nimmt alsdann eine belieb. Kraft S_1 als Anfangsspannung des Seilpolygons an, construirt mittelst des Kräftepolygons

(s. Kap. II, §. 1.) die Endspannung S_n , so ist S_n Resultante der Anfangs-

spannung S_1 und aller Außenkräfte P_1, P_2, \dots, P_n , also S_n Resultante von S_1 und der Mittelkraft R .

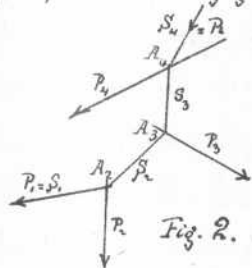
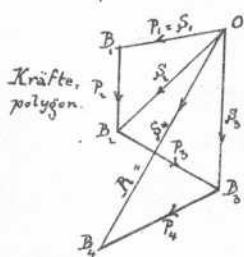


Fig. 2.



Die Mittelkraft R geht somit durch den Schnittpunkt der Anfangs- und Endspannung des Seilpolygons und wird nach Größe und Richtung aus dem Kräfte-

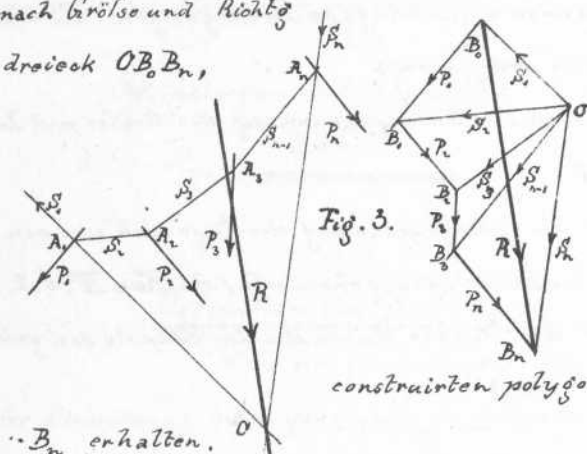


Fig. 3.

also als Verbindungslinie des Anfangspunkts B_0 und Endpunkts B_n des aus den geg. Kräften construirten polygonalen Zugs $B_0B_1 \dots$

$\dots B_n$ erhalten.

Zusatz 1. Gleichgewichtsbedingungen.

Ist das System der geg. Kräfte im Gleichgewicht, so ist die Mittelkraft $R=0$, somit fällt der End-

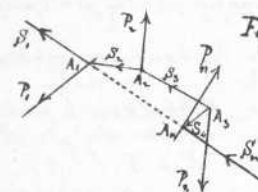


Fig. 4.

punkt B_n des polygonalen Zugs $B_0B_1 \dots B_n$

der Kräfte mit dem Anfangspunkt B_0 zu-

sammen. Ferner ist nach B_0 Obigem S'_n Resultirende von S'_1 und O , S'_n fällt also nach Lage und Größe mit S'_1 zusammen; daher die

Regel. Beim Gleichgewichtszustand gegebener Kräfte schließt sowohl der polygonale Zug der Kräfte als auch das Seilpolygon derselben. Die Linie A_1A_n heißt Schlusslinie des Seilpolygons.

Zusatz 2. Wählt man statt S'_1 eine andere Anfangsspannung T , und construiert unter Beibehaltung des polygonalen Zugs $B_0B_1, B_1B_2 \dots$ das Seilpolygon $C_1C_2C_3 \dots$, so

schneiden sich die homologen Seilspannungen S_n und T_n auf einer Geraden, welche parallel der Verbindungslinie der beiden Pole O und O' der

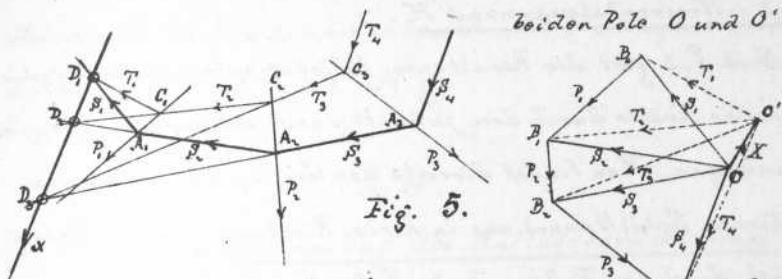


Fig. 5.

Kräftepolygone ist. Der Satz folgt einfach, daß die als Kraft X betrachtete OO' je mit den fragl. Seilspannungen ein Kräftedreieck bildet.

II.

Seilpolygon verticaler Kräfte in einer Ebene.

§. 4.

Besondere Eigenschaften des Seilpolygons verticaler Kräfte.

Der polygonale Zug der Kräfte im Kräftepolygon fällt hier mit einer Verticalen zusammen, auf der die Verticalkräfte vom Anfangspunkt B_0 aus in der jeweiligen Richtung abgetragen werden. (Dieser Kräfteplan bietet gegenüber dem in Kap. II, §. 1.3 beschriebenen den Vortheil, daß

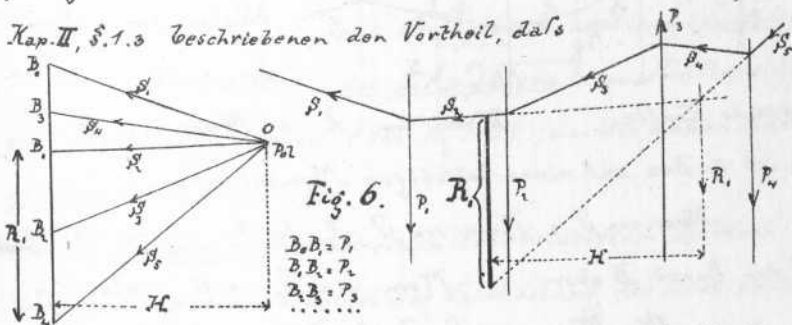


Fig. 6.

$B_0 B_1 = P_1$
 $B_1 B_2 = P_2$
 $B_2 B_3 = P_3$
 $\dots\dots\dots$

die Resultante beliebiger aufeinanderfolgender Kräfte direct

abgegriffen werden kann).

Die Horizontalprojection aller Seilspannungen ist constant = Horizontalspannung H .

Nach §. 3 geht die Resultante beliebig aufeinander folgender verticaler Kräfte durch den Schnittpunkt der begrenzenden Seilspannungen. Man findet dieselbe der Größe nach, indem man von diesem Schnittpunkt aus in horiz. Richtung die Horztleug abträgt, durch den Endpunkt eine Verticalo zieht und das Stück derselben zwischen jenen Seilspannungen mißt. (Fig. 6.)

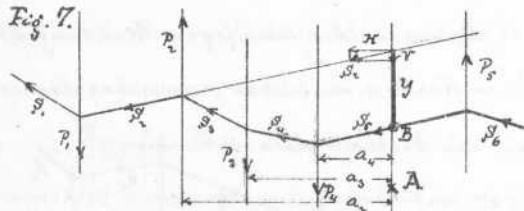
§. 5.

Momentensatz.

Die algebr. Summe der statischen Momente von aufeinander folgenden verticalen Kräften (P_1, P_2, P_3, P_4) in Beziehung auf einen belieb. Punkt (A) ist gleich dem Product aus der constanten Horizontalspannung H und dem Stück y der durch A gezogenen Verticalen, das zwischen die begrenzenden Seilspannungen (S_n und S_s) fällt:

$$\sum P \cdot a = H \cdot y.$$

Fig. 7.



Beweis. Ist B der Schnittpunkt der Verticalen durch A mit S_s , so ist für belieb.

verticalen Kräfte: $\text{Mom. um } A = \text{Mom. um } B;$

nun ist in Bez. auf einen beliebigen Momentenpunkt

Mom. von $S_s = \text{Mom. von } S_1, P_1, P_2, P_3, P_4$; in Bez. auf den Punkt B aber: $\text{Mom. von } S_s = 0$, also

$$0 = \text{Mom. von } S_1, P_1, P_2, P_3, P_4 \quad \text{oder}$$

$$\text{Mom. von } P_1, P_3, P_4 = -\text{Mom. von } P_2$$

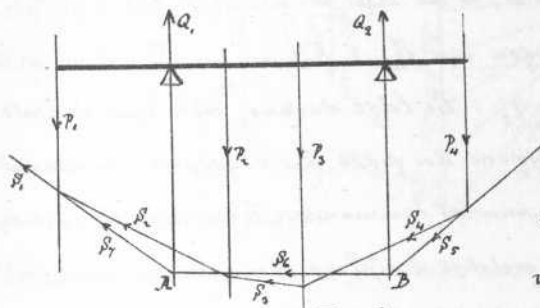
$P_2 a_2 - P_3 a_3 - P_4 a_4 = H.y + V.0$, wenn P_2 in die Horztl. und Verticall. Komponenten H und V zerlegt wird; so mit

$$\sum P.a = H.y.$$

§. 6.

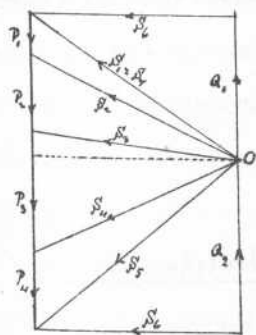
Graph. Bestimmung der Auflagerdrücke eines in zwei Punkten unterstützten Trägers.

Man zeichnet zunächst das Seilpolygon der Belastungen P_1, P_2, \dots, P_n , denkt sich die Endspannung S_1 mit dem Aufla-



gerdruck Q_1 zu S_1 und S_2 mit Q_2 zu S_4 zusammengesetzt, so muß S_4 mit S_1 zusammenfallen, da Gleichgew. nicht vorhanden ist

Fig. 8. (nach §. 3, Zus. 1.)

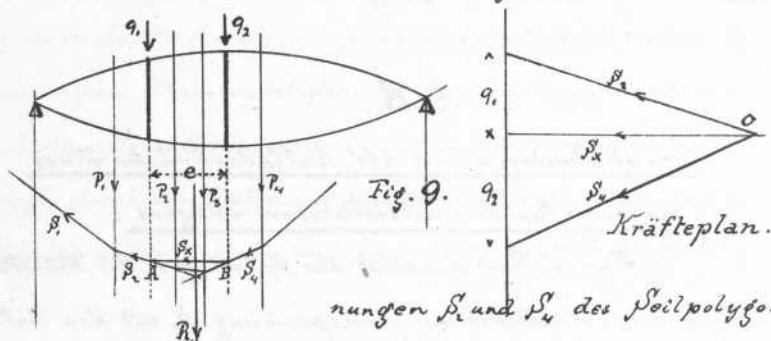


Man braucht somit nur die Anfangs- und Endspannung des Seilpolygons bis zu den Auflagerverticalen zu verlängern, die Schnittpunkte zu verbinden und mit der Verbindungslinie (Schlusslinie des Seilpolygons) im Kräftepolygon eine Parallele zu ziehen (siehe Fig. 8), um die beiden Auflagerdrücke zu erhalten.

Zusatz. Soll bei einem bel. belasteten Balken (Fig. 9.) mit Querträgern die Vertheilung der Last zwischen zwei Querträgern auf diese angegeben werden, so liegt dieselbe

Aufgabe vor: Es sind die Auflagerdrücke q_1 und q_2 eines in seinen Endpunkten unterstützten Trägers von der Länge e zu ermitteln.

Die Verticalen durch die Querträger schneiden die Span.



nungen S_1 und S_2 des Seilpolygons in den Punkten A und B, so ist AB Schlusslinie für den Balken e . Durch Eintragen von $S_x \parallel AB$ in das Kräftepolygon erhält man also q_1 und q_2 . Es folgt daraus, daß man anstatt des ursprüngl. Seilpolygons des gegebenen Lastsystems für die auf die Querträger (Knotenpunkte) kommenden Belastungen ein neues Seilpolygon erhält, welches die Schnittpunkte des alten Seilpolygons mit den Verticalen durch die Querträger verbindet.

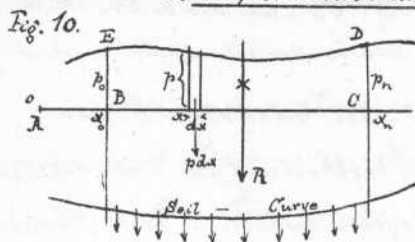
Anmerk. Die Drücke q_1 und q_2 ließen sich auch leicht aus den Resultate R , der zw. den Querträgern wirkenden Belastungen mittelst d. Hebelgesetzes finden.

§. 4.

Seilpolygon kontinuierlicher Belastungen.

(Seilcurve).

1. Graph. Darstellung der Belastung.



Trägt man in jedem Punkte des belasteten Balkens die jeweilige Belastung p pro Längeneinheit als Ordinate

nabe auf, so gibt $p \cdot dx$ die Belastung auf der Strecke dx an und die Gesamtbelastung zwischen den Abscissen x_0 und x_n ist somit:

$$R = \int_{x_0}^{x_n} p \cdot dx = \text{Fläche BCDE.}$$

BCDE heißt Belastungsfläche.

2.) Construction der Seilcurve.

Das Seilpolygon geht bei continuirlicher Belastung in eine stetige Linie, die Seilcurve, über.

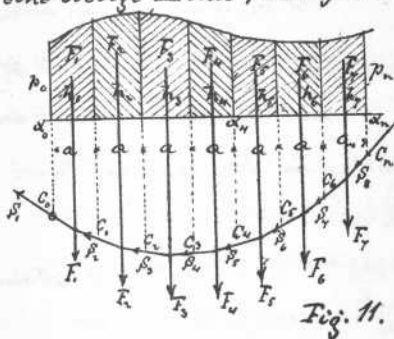
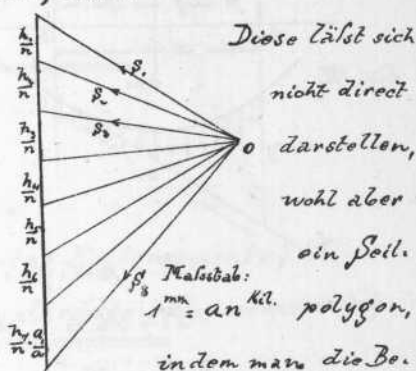


Fig. 11.



Diese lässt sich nicht direct darstellen, wohl aber ein Seilpolygon, indem man die Be-

lastungsfläche in einzelne Streifen zerlegt und die in deren Schwerpunkten wirkenden Resultierenden der Streifen als Einzelbelastungen behandelt.

Die Berührungspunkte der Seilcurve liegen in den Schnittpunkten C der Theilordinaten mit dem Seilpolygon. Es ist z. B.

$$S'_2 \text{ Mittelkraft von } S_1 \text{ und } F_1, F_2, F_3, F_4$$

$$= \text{Mittelkraft von } S_1 \text{ und } \int_{x_0}^{x_n} p \cdot dx, \text{ also } S'_2 \text{ End-}$$

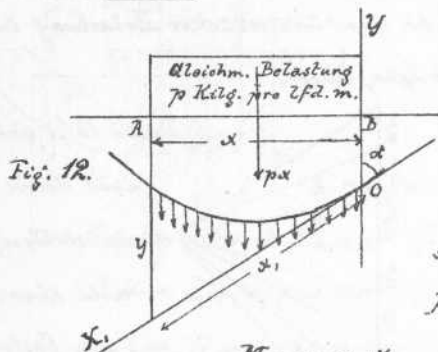
spannung und damit Tangente an die Seilcurve zwischen x_0 und x_n . Nimmt man die Breite der Streifen constant = einem runden Maße a , so kann man bei entsprechender Veränderung des Kräftemaßstabs statt F_1, F_2, \dots die Schwerpunktsordinaten h_1, h_2, \dots oder einen bestimmten Theil $\left(\frac{1}{n}\right)$

derselben im Kräftepolygon auftragen.

(Anwendg. s. in d. Gewölbe theorie Kap. IV. und Kap. I. §. 4. Trägheitsmoment).

3.) Satz. Die Seilcurve gleichmäßiger continuir. Belastung ist eine Parabel.

Beweis. Die Gesamtbelastung eines Trägerstücks



$AB = x$, das mit p kg pro Lfd. m. gleichmäßig belastet ist, beträgt $p \cdot x$ kg; das statische Moment derselben in Bez. auf den Punkt A ist

$$M = p \cdot x \cdot \frac{x}{2} = \frac{p x^2}{2} \quad \text{Nach §. 5 ist aber}$$

$$M = H \cdot y, \text{ also}$$

$$\frac{p x^2}{2} = H \cdot y \quad ; \quad y = \frac{p H}{2} x^2$$

Mit $x = x_1 \sin \alpha$ wird die Gleichung der Seilcurve in Bez. auf die Achsen OX_1 und OY

$$y = \frac{p H}{2} \sin^2 \alpha \cdot x_1^2 \quad \text{dies ist die Gleichg.}$$

einer Parabel, bezogen auf einen Durchmesser und die zugeordnete Tangente.

4.) Anhaltspunkte zur Construction der Seilcurve gleichmäßiger Belastung.

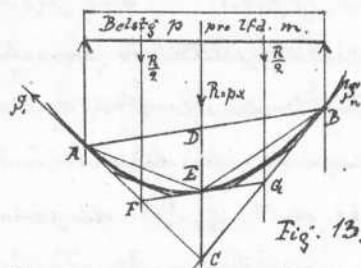


Fig. 13.

man benutzt zur Construction der Seilcurve die Eigenschaft der Parabel, daß sie das Stück CD des Durchmessers zwischen dem Tangentenschnitt C und der Sehne AB

Man benützt zur Construction der Seilcurve die Eigenschaft der Parabel, daß sie das Stück CD des Durchmessers zwischen dem Tangentenschnitt C und der Sehne AB

durch die Berührungspunkte halbiert und die Tangente FG im Halbierungspunkte E parallel der Sehne AB ist.

Dieser Satz kann auf beliebig kleine Stücke der Seilcurve (durch fortgesetztes Halbiren der Tangentenabschnitte) angewendet werden.

Anmerk. Der Satz findet sich auch aus einer einfachen statischen Betrachtung, indem man die Resultirenden der Belastungen der einzelnen Trägerstücke einführt.

B.

Biegemomente (Kraftmomente)
und abscheerende Verticalkräfte (Transversalkräfte).

I.

Allgemeines

§. 8.

Erläuterungen.

Aus Kap. I. §. 11-13 geht hervor, daß bei einem auf Biegung beanspruchten Träger die in einem Querschnitt x thätige, verticale Schubkraft V_x = der Mittelkraft R_x aller an einem Trägertheil rechts oder links vom Schnitt wirkenden äußeren Kräfte (Belastungen und Auflagedrücke), weshalb auf letztere selbst der Name abscheerende Verticalkraft od. vertic. Schubkraft übertragen wird.

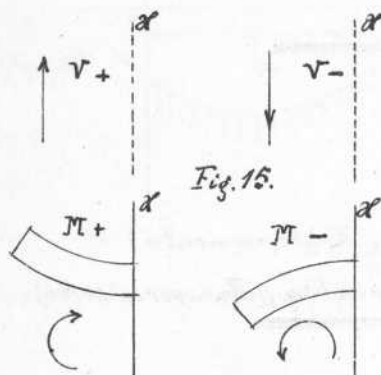
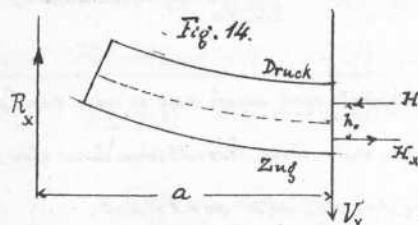
Das Kräftepaar V_x, R_x der verticalen Kräfte ist im Gleichgewicht gehalten durch das Kräftepaar der horizontalen Normalspannungen H_x . Das gemeinschaftliche Moment

beider Kräftepaare

$$R_x \cdot a = V_x \cdot a = H_x \cdot h_x$$

heißt das Biegemoment

ment M_x des Trägers im Querschnitt x .



Das Biegemoment M_x ist somit gleich dem statischen Moment aller verticalen Kräfte auf einer Seite des Querschnitts x in Bez. auf die Ebene des Querschnitts.

Die abscherende Verticalkraft wird positiv oder negativ eingeführt, je nachdem R_x am linken Trägertheil nach oben oder nach unten wirkt.

Das Biegemoment heißt positiv oder negativ, je nachdem $R_x \cdot a$ am linken Trägertheil rechts drehend oder links drehend wirkt, der Träger also nach unten oder nach oben durchgebeugt wird.

§. 9.

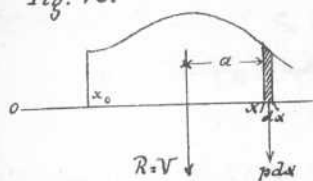
Beziehung zwischen M_x und V_x .

Denkt man sich M_x und V_x als Functionen der Abscisse x , so besteht die Beziehung:

$$V_x = \frac{d.M_x}{dx}$$

$M_x = \int_{x_0}^x V_x dx$, denn läßt man die Abszisse x um dx zunehmen, nimmt auf der Strecke dx die Belastung gleichmäßig = p kg pro Längeneinheit an und bezeichnet die Resultante der Aussenkräfte bis zum

Fig. 16.



Querschnitt x mit R , so ist:

$$M_x = R \cdot a$$

$$M_{x+dx} = M_x + dM_x = R(a+dx) + p dx \cdot \frac{dx}{2}$$

$$dM_x = R dx + \frac{p}{2} dx^2 \quad \text{oder mit Vernachlässigung von } \frac{p}{2} dx^2: dM_x = R dx$$

gung von $\frac{p}{2} dx^2$: $dM_x = R dx$

$$\frac{dM_x}{dx} = R = V$$

Zusatz. Hieraus folgt, daß für $V=0$ das Biegemoment ein Maximum oder Minimum erreicht, je nachdem V algebraisch ab- oder zunimmt.

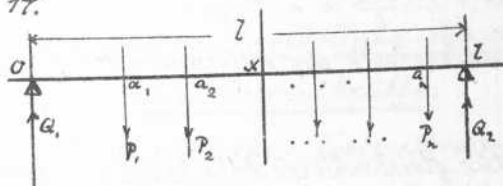
§. 10.

Bestimmung des Biegemoments bei gegebener Belastung.

1.) Analytische Methode { nach Dr. J. Weyrauch:

Zeitschr. d. Archit. u. Ingen. Ver. zu Hannover 1846 }.

Fig. 17.



Die Abstände der Belastungen P_1, P_2, \dots, P_n von dem linken Auf.

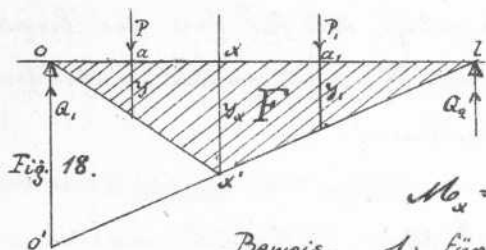
lager (Abscissenursprung) werden mit a_1, a_2, \dots, a_n bezeichnet, dann ist das Moment um x

$$M_x = Q_1 x - \sum_{i=1}^n P_i (x - a_i) = \left\{ \sum_{i=1}^n P_i \frac{l - a_i}{l} \right\} x - \sum_{i=1}^n P_i (x - a_i)$$

$$\begin{aligned}
 M_x &= \frac{x}{l} \sum_0^l P(l-a) - \sum_0^x P(x-a) \\
 &= x \sum_0^l P - \frac{x}{l} \sum_0^l P \cdot a - x \sum_x^l P + \sum_x^l P \cdot a \\
 &= x \sum_0^l P - \frac{x}{l} \sum_0^l P \cdot a - \frac{x}{l} \sum_x^l P \cdot a + \sum_x^l P \cdot a \\
 \parallel \quad M_x &= \frac{l-x}{l} \sum_0^x P \cdot a + \frac{x}{l} \sum_x^l P(l-a) \quad \parallel
 \end{aligned}$$

2.) Graphisch-analytische Methode (n. D. Weyrauch).

Man trage von O aus senkrecht nach unten $OO' = x$ auf, ziehe $O'l$, markiere den Punkt x' senkrecht unter x und verbinde O mit x' so ist der Beitrag, welchen eine an irgend einer Stelle a angreifende Last P zum Moment bei x liefert, gleich $P \cdot y$, wenn y die Ordinate des Linienzugs $Ox'l$ unter der betreffenden Last P bedeutet; das Ge-



sammelmoment im Querschnitt x beträgt demnach

$$M_x = \sum_0^l P \cdot y$$

Beweis. 1.) für eine Last vor x .

Das Biegemoment in Bez. auf den Querschnitt x ist:

$$\begin{aligned}
 m_x &= P \cdot \frac{l-a}{l} \cdot x - P(x-a) \\
 &= P \cdot a \cdot \frac{l-x}{l} = P \cdot y
 \end{aligned}$$

2.) für eine Last nach x

$$m_x = Q_1 x = P_1 \cdot \frac{l-a_1}{l} \cdot x = P_1 \cdot y_1$$

Für eine Last außerhalb der Stützen ist y negativ einzuführen.

Zusatz. Für gleichmäßige Belastung (Eigengewicht) entlang dem ganzen Träger ist:

$$\begin{aligned}
 M_x &= \frac{lp}{2} \cdot x - \frac{px^2}{2} = \frac{px}{2} (l-x) \\
 &= p \frac{l}{2} \cdot \frac{x(l-x)}{l} = p \cdot \frac{l}{2} \cdot y_x
 \end{aligned}$$

$M_x = p \cdot F$, wenn F der Inhalt des Dreiecks $Ox'l$.

3.) Graphische Methode mittelst des Seilpolygons.

Trägt man im Seilpolygon der Belastungen die Schlusslinie ein, so ist nach §. 5 das Moment der äußeren Kräfte

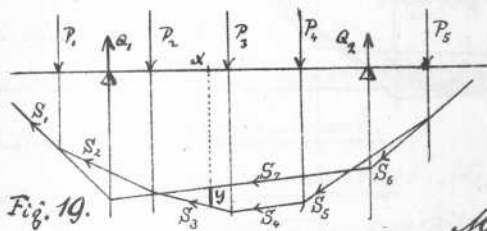


Fig. 19.

te auf einer Seite des Querschnitts x oder das Biegemoment desselben

$$M_x = H \cdot y ; \quad y \text{ ist das}$$

Stück der Ordinate im Querschnitt x zwischen den geschnittenen Seilspannungen, wobei auch die Schlusslinie als Seilspannung angesehen wird. Nimmt man $H = 1$, so stellen die Ordinaten y die Biegemomente selbst vor. Das selbe erreicht man durch Anwendung des geeigneten Maßstabs; ist z.B. der Maßstab für das Seilpolygon

$$1^{\text{mm}} = a^{\text{m}} \quad \text{und} \quad H = b^{\text{T}}, \text{ so ist der Maß-}$$

stab für die Biegemomente

$$1^{\text{mm}} = a \cdot b^{\text{minTonn.}} \text{ anzunehmen.}$$

§. 44.

Graphische Darstellung der abschneerenden Verticalkräfte.

Die abschneerende Verticalkraft V_x eines Querschnitts x ergibt sich aus dem Belastungssystem durch einfaches Addiren der Aussenkräfte links vom Querschnitt.

Zwischen zwei Einzellasten ist V constant, also

die graphische Darstellung von V eine horizontale Gerade; bei

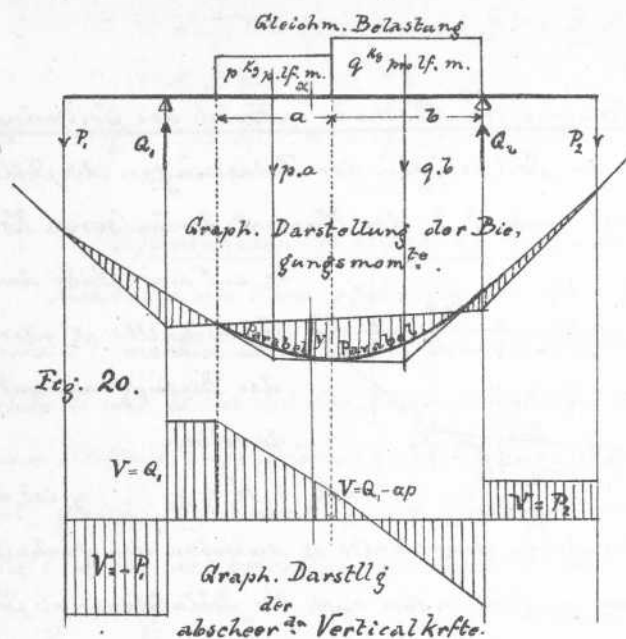


Fig. 20.

nade; bei gleichmäßiger Belastung ändert sich V proportional x , also die graphische Darstellung eine geneigte Gerade.

II.

Grenzwerte der Biegemomente und abscheerenden Vertikalkräfte für einen in seinen Endpunkten unterstützten Träger.

§. 12.

Festes Lastsystem.

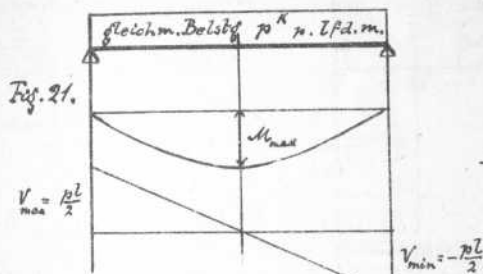
a. Gleichmäßige Belastung.

1. Biegemoment. Die graphische Darstellung der Biegemomente ist eine Parabel, (nach §. 4.3 u. 10.3)

$M_x = \frac{p}{2} (lx - x^2)$ somit M_{\max} in der Mitte des Trägers

$$M_{\max} = \frac{pl^2}{8}$$

2. Abschneerende Vertikalkraft. Graphische Dar.



stellung eine Gerade

$$V_x = \frac{p}{2} (l - 2x)$$

Grenzwerte an den

Auflagern

$$V_{\max} = \frac{p \cdot l}{2}$$

$$V_{\min} = -\frac{p \cdot l}{2}$$

b. Ungleichmäßige Belastung.

1. Biegemoment.

Analytischer Weg: Nach §. 9. Zus. tritt M_{\max}

an derjenigen Stelle u des Trägers ein, wo $V = 0$; nun ist

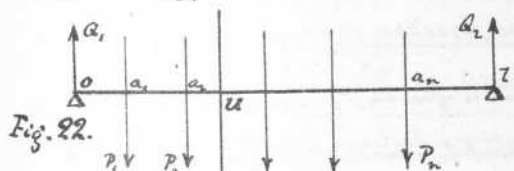
$$V_x = Q_1 - \sum_0^x P$$

für $V = 0$ wird

$$Q_1 = \sum_0^u P \quad (1.)$$

d. h. M_{\max} findet da statt, wo die Summe der von links

nach rechts addierten Belastungen die Größe des linken Auflagerdrucks durchschreitet. (Sind nur Einzellasten vorhanden, so liegt u unter einer solchen).



nach rechts addierten

Belastungen die

Größe des linken

$$\text{Es ist } M_u = Q_1 \cdot u - \sum_0^u P(u-a)$$

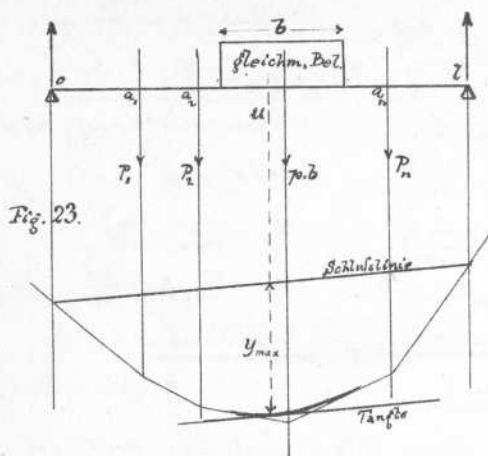
$$= (Q_1 - \sum_0^u P) u + \sum_0^u P \cdot a$$

$$(2.) \quad M_{\max} = \sum_0^u P \cdot a \quad \left\{ = \sum_u^l P(l-a) \right\}$$

in Worten: Das Maximalmoment ist gleich dem statischen Moment aller Lasten von einem Auflager bis zum gefährlichen Querschnitt, bezogen auf dieses Auflager. (Von der Last über u ist in Formel (2.) nur soviel zu berücksichtigen, als Formel (1.) bedingt).

Graphischer Weg: Man konstruiert das Seilpo-

Lyggen der Belastungen, zieht die Schlusslinie ein und be-



stimmt (durch eine Tangente parallel der Schlusslinie) y_{\max} , so ist

$$M_{\max} = H \cdot y_{\max}$$

2. Die abschneerende Vertikalkraft erreicht ihre beiden Grenzwerte in den Auflagern:

$$V_{\max} = Q_l = \frac{1}{l} \sum P(l - a)$$

$$V_{\min} = Q_r = \frac{1}{l} \sum P \cdot a$$

§. 13.

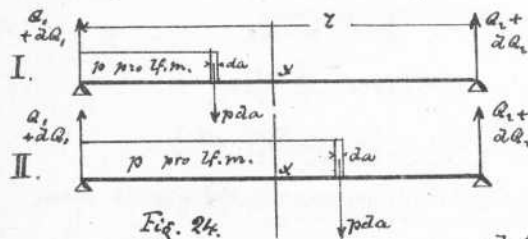
Mobiles Lastsystem.

a. Gleichmäßige Belastung.

Maximalmoment für einen bestimmten Querschnitt x .

Lässt man die Last von links nach rechts vorschreiten,

so ist bei Hinzubritt von $p \cdot da$



Fall I

$$dM = dQ_l(l - x) \text{ also } dM$$

positiv

Fall II

$$dM = dQ_l x, \text{ ebenfalls positiv,}$$

somit tritt im Querschnitt x $\max M_x$ bei voller Belastung ein

$$\max M_x = \frac{p x}{2} (l - x)$$

Maximum und Minimum der abschneerenden Vertikalkraft im

Querschnitt x . Schreitet die Last von rechts nach links vor,

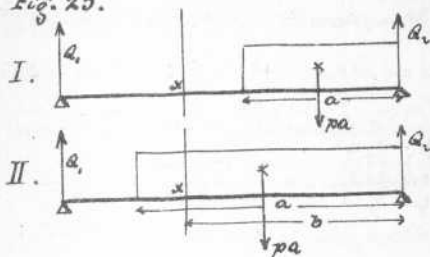
so ist im

Fall I: $V = Q_1 = \frac{a^2 p}{2l}$

sonit wächst V mit wach.

sendem a .

Fig. 25.



Fall II

$$V = -(Q_2 - b p)$$

$$= b p - Q_2$$

Q_2 wächst hier mit a , wäh.

rend $b p$ constant bleibt, somit nimmt V ab mit wach.
sendem a .

Daraus folgt, daß $\max V_x$ eintritt, wenn die mobile
Belastung bis zum Querschnitt x reicht.

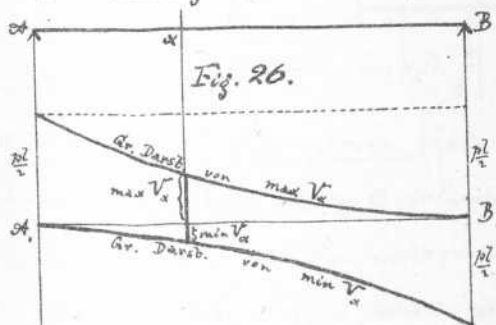
$\min V_x$ findet bei linksseitiger mobiler Belastung bis
zum Querschnitt x statt.

$$\max V_x = \frac{x^2 p}{2l}$$

$$\min V_x = \frac{(l-x)^2 p}{2l}$$

Die graphischen Darstellungen von $\left\{ \begin{matrix} \max V_x \\ \min V_x \end{matrix} \right\}$

sind Parabelbögen, die ihren Scheitel in der $\left\{ \begin{matrix} \text{rechten} \\ \text{linken} \end{matrix} \right\}$ Auf-



lagerverticalen haben,
und deren Pfeilhöhe
 $= \frac{p l^2}{2}$ (vergl. Kap. II.
S. 67.)

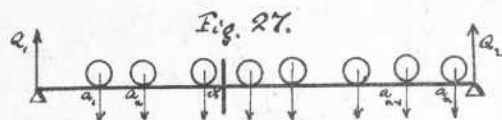
6. Ungleichmäßige Belastung.

Für Eisenbahnbrücken werde das auf S. 57 ange-
gebene Lastsystem, für Straßenbrücken je nach Umständen
das eine oder das andere der S. 58 aufgeführten Systeme

zu Grunde gelegt.

Maximalmoment für einen bestimmten Querschnitt x .

Das Lastsystem werde von rechts nach links verschoben, so ändert sich M_x mit den Abscissen a , es ist



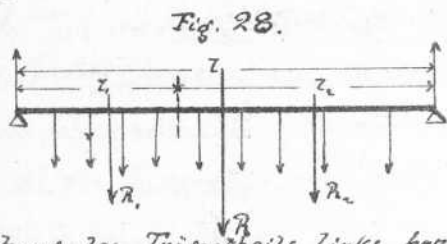
$$M_x = Q_1 x - \sum_0^x P(x-a) \\ = \frac{x}{l} \sum_0^l P(l-a) - \sum_0^x P(x-a).$$

M_x wird ein Maximum, wenn

$$\frac{dM_x}{da} = -\frac{x}{l} \sum_0^l P + \sum_0^x P \\ = \sum_0^x P - \frac{x}{l} \sum_0^l P \quad \text{von } + \text{ in } - \text{ übergeht.}$$

Regel. Für irgend ein mobiles Lastsystem P_1, P_2, \dots tritt das größte Moment in einem gegebenen Querschnitt x bei derjenigen Laststellung ein, für welche die Summe der von 0 nach rechts addierten mobilen Lasten im Querschn. x den Werth $\frac{x}{l} \sum_0^l P$ überschreitet:

oder mit anderen Worten:



$\max M_x$ tritt für einen Querschnitt x ein, wenn die durchschnittliche Belastung des Trägers links bzw. rechts vom Querschnitt

gleich ist der durchschnittlichen Belastung des ganzen Trägers zwischen den Auflagern, d.h. wenn

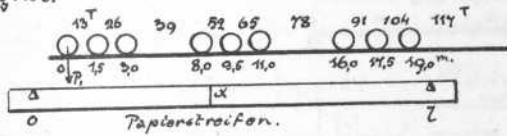
$$\frac{R}{l} = \frac{R_1}{z_1} = \frac{R_2}{z_2} \quad \text{wird.}$$

Besteht die mobile Last aus Einzellasten allein, so tritt in jedem Querschnitt x das größte Moment in einem Augenblicke ein, wo ein Rad den Querschnitt passiert.

Die Untersuchung kann bei kleinen Trägern am besten analytisch, bei größeren empirisch (nach Mohr)

mittels eines Papierstreifens geschehen, auf dem die Stützen O und L und der Querschnitt x markirt sind; man bewegt denselben entlang dem Lastsystem und un-

Fig. 29.



tersucht die verschie-
denen Lasten auf
obige Regel, nach

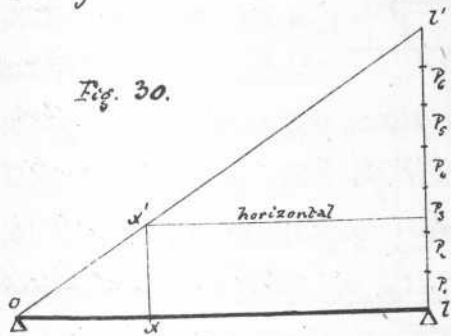
dem im Lastsystem die aufeinanderfolgenden Summen der Lasten und die Abstände von der ersten Last eingeschrie-
ben sind, sowie der Werth $\frac{x}{L}$ ein für allemal ausgerechnet ist.

Anmerkung. Ist die Regel für mehrere Laststellun-
gen befriedigt, so ist diejenige festzuhalten, welche das abso-
lut größte $\max M_x$ liefert.

Eine graphische Methode (nach Dr. Weyrauch)

ist folgende: Man trage die Lasten der Reihe nach von

Fig. 30.



L aus senkrecht nach oben
auf und ziehe OL' . Um
dann für irgend einen
Querschnitt x die ungün-
stigste Laststellung zu
erhalten, ziehe man die

Senkrechte xx' und von x' aus eine Horizontale nach L' .

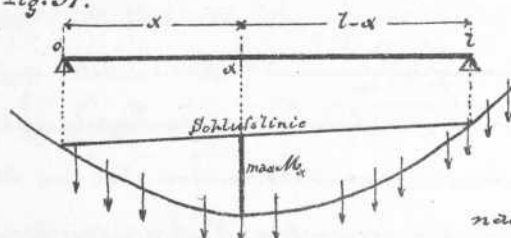
Die Last, welche getroffen wird, muß über x stehen.

Trifft die Horizontale gerade den Grenzpunkt zweier
Lasten, so ist es gleichgültig, welche derselben bei x steht.

Anmerkung. Es ist nicht außer Acht zu lassen, nach
träglich zu untersuchen, ob bei der gefundenen Laststel-
lung auch genau soviel Lasten auf dem Träger Platz
finden, als bei der Construction angenommen sind.

$\max M_u$ selbst findet man nach einer der drei Methoden in §. 10. Bei Anwendung der dritten bleibt das Seilpolygon der mobilen Last fest; es wird für je-

Fig. 31.

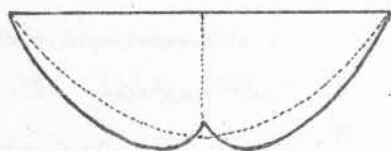


den Querschnitt von der Last, die nach dem Obigem über den selben zu stehen kommt, nach links x , nach rechts

$l-x$ in horizontalem Sinne abgetragen und die Schlußlinie eingezeichnet.

Zusatz. Construiert man nach Obigem z.B. für einen Balken mit einem Eisenbahnzug als mobiler Last die Maximalmomente, so erhält man die nebenstehende Figur, aus

Fig. 32.



der man sieht, daß nicht in der Mitte das absolute Maximum eintritt, während eine der Zugbelas-

tung gleichkommende gleichmäßige Belastung die punctirte eingezeichnete Linie der M_{\max} gegeben hätte. (vergl. §. 14)

Maximum und Minimum der abscheer. Verticalkraft

für einen gegebenen Querschnitt x .

Um $\begin{cases} \max V_u \\ \min V_u \end{cases}$ zu erhalten, wird das mobile Lastsystem von $\begin{cases} \text{rechts nach links} \\ \text{links nach rechts} \end{cases}$ auf den Träger heringeschoben.

Analytischer Weg.

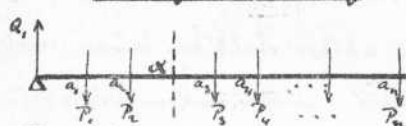


Fig. 33.

$$V_u = Q - \sum_{i=1}^n P_i$$

$$V_l = Ql - \sum_{i=1}^n P_i l$$

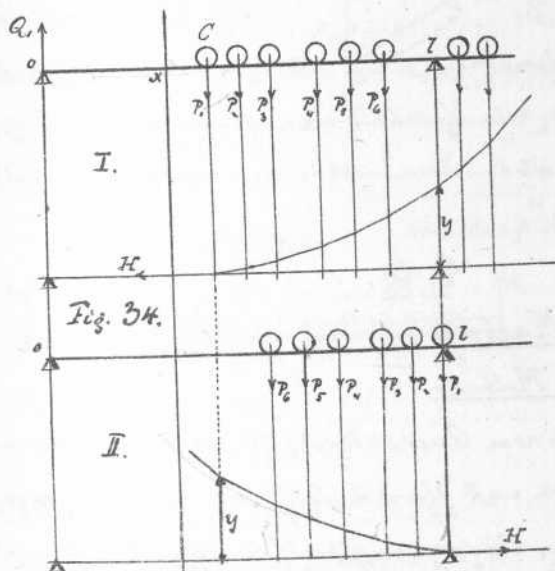
$$V_u = \sum_{i=1}^n P_i (l-a_i) + \sum_{i=1}^n P_i (l-a_i) - \sum_{i=1}^n P_i l$$

$$V_l = \sum_{i=1}^n P_i l - \sum_{i=1}^n P_i a_i + \sum_{i=1}^n P_i (l-a_i) - \sum_{i=1}^n P_i l$$

$$V_x \cdot l = \sum_x P(l-a) - \sum_0^x P \cdot a$$

$\sum_x P(l-a)$ ist das statische Moment der Lasten rechts von x in Bez. auf die rechte Stütze, $\sum_0^x P \cdot a$ das der Lasten links von x in Bez. auf die linke Stütze; man hat also zu untersuchen, bei welcher Laststellung die Differenz dieser statischen Momente ein Max. oder Min. erreicht, was meistens eintritt, wenn die erste Last am Querschnitt angekommen ist.

Graphischer Weg. Construiert man nach Fig. 34 I ein Seilpolygon der Lasten mit horizontaler Anfangsspannung H , so ist,



solange die Last P_i rechts von x

$$V_x = Q_i = \frac{H}{l} \cdot y \quad (\text{nach §. 5})$$

wenn P_i links von x

$$V_x = Q_i - \sum_0^x P$$

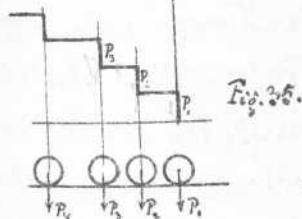
Q_i ist proportional y und kann bei entsprechender Annah.

me des Kräfte ma's,

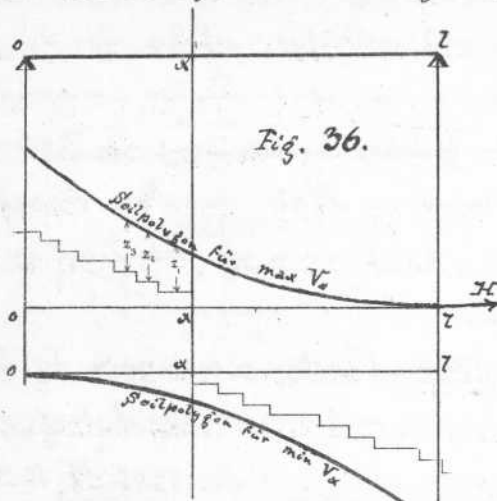
stabs $\{ 1^{mm} = a \frac{H}{l}^T, \text{ wenn im Seilpolygon } 1^{mm} = a^m \}$ durch y direct dargestellt werden.

Man denkt sich nun das Lastsystem sammt Seilpolygon umgekehrt

und den Anfangspunkt nach l verlegt, wie in Fig. 34 II, so fällt y unter die wirkliche Spitze C des Lastsystems.



Man braucht also, um Q , zu erhalten, das Seilpolygon des Lastsystems nach Fig. 34, II nur einmal aufzu-



tragen und je die Ordinate y durch die Spitze C des Lastsystems zu messen.

$\sum_0^x P$ aber gibt graphisch dargestellt die Stäffelform in Fig. 35, durch Ver-

gleichung der Ordinaten z_1, z_2, z_3, \dots (Fig. 36.) findet man $\max V_x$. $\min V_x$ erhält man ganz ebenso (Fig. 36.) durch Verschieben der Lasten von links nach rechts.

§. 14.

Absolutes Maximalmoment am Träger.

Analytische Methode.

Wenn in einem Querschnitt v eines durch ein mobiles Lastsystem und gleichmäßig vertheiltes Eigengewicht beanspruchten Trägers zugleich das größte Moment $\max M_x$, das bei dem angenommenen Lastsystem im Querschnitt v möglich ist, und das größte Moment M_{\max} , welches bei der betr. Laststellung am Träger vorkommt, entstehen soll, so muß nach §. 13₁ und §. 12₁ im Punkte v die Summe der von links nach rechts addirten Lasten mit Einrechnung des Eigengewichts sowohl den Werth des Auflagerdrucks Q , als den Werth $\frac{v}{l} \sum_0^l P$ durchschrei-

$$v = \frac{l}{2} + \frac{(P_1 d_1 + \dots + P_{z-1} d_{z-1}) - (P_z d_{z+1} + \dots + P_n d_n)}{2 \sum_{i=1}^z P + p \cdot l}$$

somit

$$\begin{aligned} M_v &= \max M_{\max} = Q_1 \cdot v - \sum_{i=1}^z P_i \cdot d - p \cdot v \cdot \frac{v}{2} \\ &= \frac{R \cdot v}{l} \cdot v - \sum_{i=1}^z P_i \cdot d - p \cdot v \cdot \frac{v}{2} \\ &= \frac{v^2}{2l} \left\{ 2 \sum_{i=1}^z P + p l \right\} - \sum_{i=1}^z P_i \cdot d \\ &= \frac{v^2}{2l} \left\{ 2 \sum_{i=1}^z P + p l \right\} - \{ P_1 d_1 + \dots + P_{z-1} d_{z-1} \} \end{aligned}$$

(vergl. Weyrauch)

Zusatz. Moment um die Verticale R gibt

$$Q_1 (l-v) = Q_2 \cdot v$$

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{v}{l-v} \quad \text{d.h. in dem Augenblick, wo}$$

das absolute Maximalmoment eintritt, verhalten sich die Auflagerdrücke wie ihre Abstände von dem Querschnitt des Maximalmoments.

Graphische Methode.

1.) Nachdem für verschiedene Querschnitte nach §. 13 b

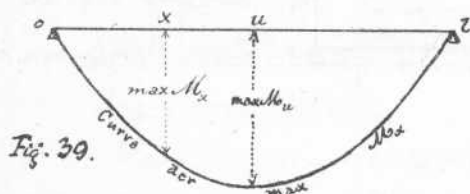


Fig. 39.

$\max M_x$ berechnet ist, trägt man daselbe in je dem Querschnitt als Ordinate auf und verbindet

die Endpunkte durch einen stetigen Zug; die größte Ordinate des Zugs gibt alsdann das absolute Maximalmoment.

2.) Hat man das Seilpolygon des mobilen Lastsystems aufgetragen, so erhält man nach §. 13 b für jeden Querschnitt

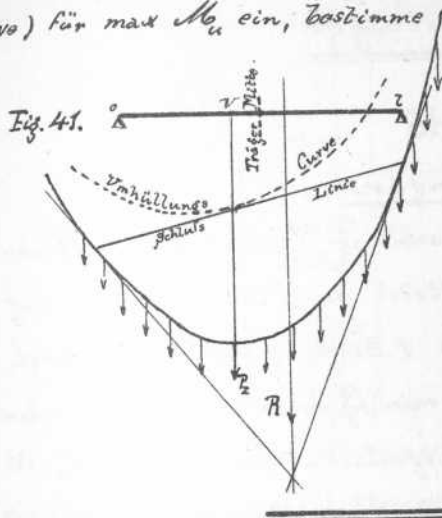


Fig. 40.

die Schlußlinie der ungünstigsten Laststellung. Die Umhüllungslinie der Schluß-

linien liefert $\max M_u$, welches jedenfalls unter einer Last P_z liegt. Um die Lage von v am Träger genau zu bestimmen,

ziehe man die Schluslinie (Tangente an die Umhüllungscurve) für $\max M_z$ ein, bestimme



$R = \sum_0^l P$ durch Verlängerung der Endspannungen und halbiere die Entfernung zwischen R und P_z , so liegt der Halbpunkt dieser Strecke in der Trägermitte.

C.

Berechnung von einfachen Trägern
mit ungleichmäßiger, mobiler Belastung.

I.

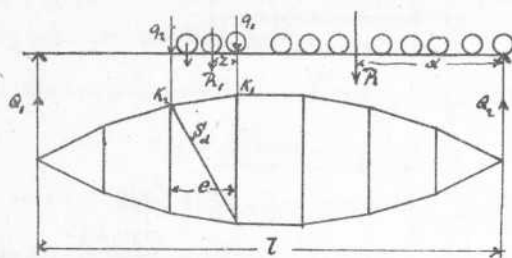
Blechträger.

§. 15.

Nachdem für eine Anzahl von Querschnitten die Maximalbiegemomente berechnet sind, findet man die Dimensionen des Querschnitts nach Kap. I. §. 21.

Die Vernietung berechnet sich aus den ungünstigsten Verticalkräften, wie in Kap. I. §. 36. angegeben ist.

auf der dem Schnitt zugekehrten Seite von K_1 liegen, und R die Resultante der Gesamtverkehrslast, q_1 und q_2 die Komponenten von R ,



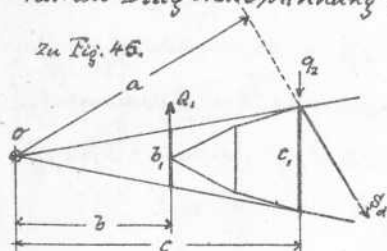
auf die Knotenpunkte K_1 und K_2 , Q_1 der Auflagedruck von der Verkehrslast;

Fig. 45.

alsdann ist in Bez. auf den Momentenpunkt O

für die Diagonalspannung S_d^y

zu Fig. 46.



$$O = S_d \cdot a - Q_1 \cdot b + q_2 \cdot c$$

$$O = S_d \cdot a - R \frac{x}{l} \cdot b + R_1 \frac{z}{e} \cdot c$$

$$S_d^y = R_1 \frac{x \cdot b}{a \cdot l} - R_1 \frac{z \cdot c}{a \cdot e}$$

$$\frac{dS_d^y}{dx} = \frac{b}{a} \cdot \frac{R}{l} - \frac{c}{a} \cdot \frac{R_1}{e} \cdot \frac{dz}{dx}$$

$$\frac{dz}{dx} = 1, \text{ also}$$

$$\frac{dS_d^y}{dx} = \frac{c}{a \cdot e} \left\{ \frac{b \cdot e}{c \cdot l} R - R_1 \right\}, \quad \text{damit } S_d^y \text{ ein Maximum}$$

oder Minimum werde, muß

$$\frac{b \cdot e}{c \cdot l} R - R_1 \text{ von } + \text{ in } - \text{ übergehen oder um-}$$

gekehrt.

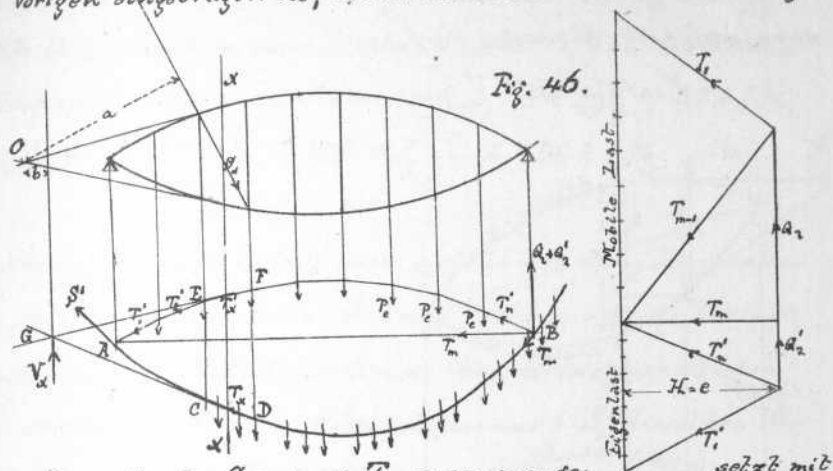
Das wird nur eintreten können in dem Augenblick, wo eine neue Last auf den Knotenpunkt K_1 tritt, und man hat die einzelnen Lasten auf diese Formel zu untersuchen.

Bemerkung. Statt des Verhältnisses $\frac{b}{c}$ wird man vortheilhafter $\frac{b_1}{c_1}$ anwenden, weil bei O in der Regel ein flacher Schnitt ist. Für die Spannungen in den Verticalstäben ändern sich nur b und c ; im Übrigen bleibt die Untersuchung dieselbe.

2.) Grenzspannungen.

Nachdem die Sohlslinie für die mobile Last nach dem

Vorigen eingezeichnet ist, denke man sich die ihrer Richtung



entsprechende Spannung T_m zusammenge-

dem Auflagerdruck Q_1 der Eigenlast zu T_1 und diese Spannung der Reihe nach mit der Eigenlast P_e pro Knotenpunkt, wodurch sich das Seilpolygon AEFB der Eigenlast ergibt.

Da die Last nur in den Knotenpunkten angreift, so hat man statt der Belastungen, welche zwischen zwei Knotenpunkten fallen, die Komponenten q_1 und q_2 , welche auf die Knotenpunkte kommen, in Rechnung zu bringen und demgemäß nach §. 6. Zus. die Seilspannungen T_x einzuführen.

Sind nun T'_x und T_x die durch den Schnitt xx getrennten Seilspannungen der Eigen- und Verkehrslast, so ist T'_x nach ob. Construction Resultante von T_x und allen verticalen Kräften rechts von x , d. h. es ist T'_x Resultante von T_x und der abscheer. Verticalkraft V_x ; es geht somit V_x durch den Schnittpunkt A von T_x und T'_x .

Aus der Momentengleichung um den Schnittpunkt O der geschnittenen Gurtungsstücke findet man alsdann

$$P'_d = \frac{V_x \cdot b}{a}$$

Indels sind hier die Schnitte O und A bisweilen nicht

scharf zu bestimmen oder fallen über das Zeichenblatt hinaus, weshalb folgendes Verfahren vorzuziehen ist: (Fig. 47.)

Man führt statt V_a zwei in den Verticalen CE und DF

wirkende Kräfte X_1 und X_2

ein; alsdann ist

$V_a = X_1 - X_2 = DJ$ (wenn
Horizontalspannung $H =$
Fachlänge e).

Nimmt man die kleinere
Kraft $X_2 = CE$, so ist

$$\begin{aligned} X_1 &= CE + DJ \\ &= FJ + DJ = DF \end{aligned}$$

Die Ordinaten CE und DF lassen sich zusammensetzen

aus den Ordinaten
 y_1, y_2 von der Eigen-
last, und z_1, z_2 von
der mobilen Last,

so daß

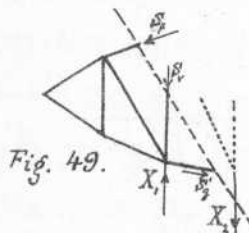
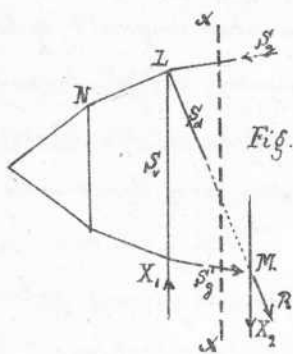
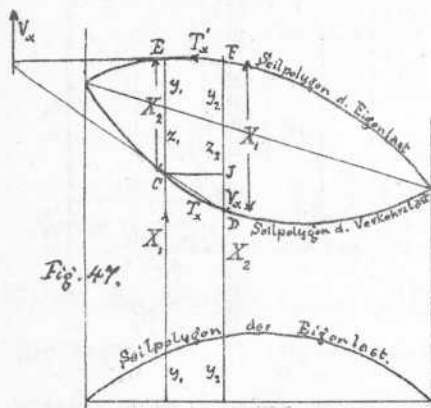
$$X_1 = y_1 + z_1$$

$$X_2 = y_2 + z_2$$

(Das Seilpolygon der Eigenlast kann
man getrennt von dem der mobilen
Last auftragen).

An dem durch den Schnitt $\alpha\alpha$
getrennten einen Trägertheil (Fig. 48.) sind nun folgende
Kräfte thätig: X_1, X_2, S_g, S_d, S'_g , welche den Trägertheil
im Gleichgewicht halten.

Man führe als Resultante von S'_g und X_2 die Kraft

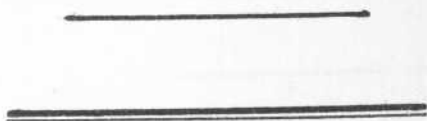


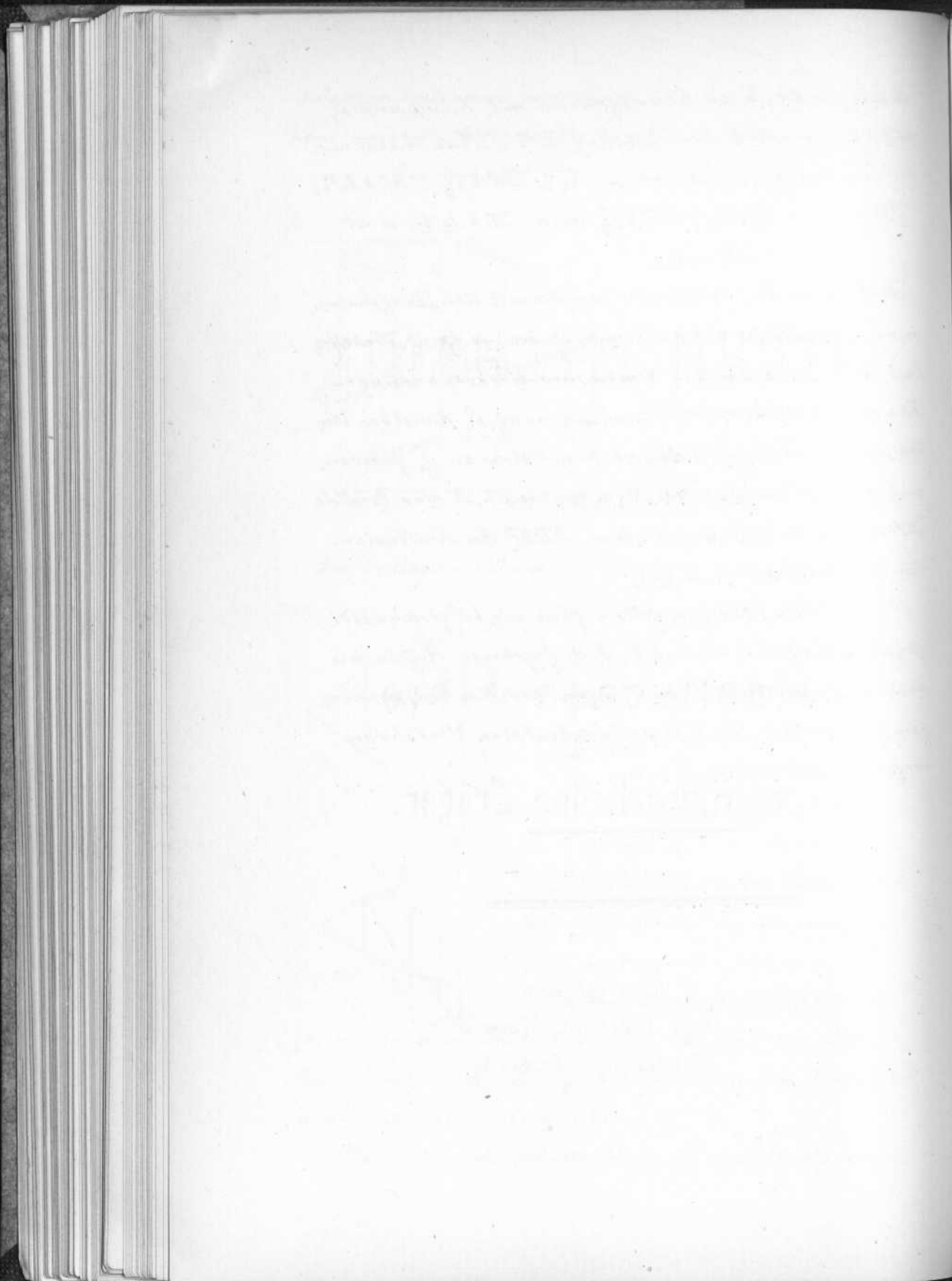
R ein, so ist R im Gleichgewicht mit X_1 , S_d und S_g und wirkt somit in der Richtung LM . Man macht nun im Kräfteplan AB (vertel) $= X_2$, $BC \parallel S_g'$, $AC \parallel LM$, CD (vertel) $= X_1 - X_2$, $BE \parallel S_g$ und $DE \parallel LM$, so ist

$$DE = S_d$$

Diejenigen Verticalständer, welche mit den Diagonalen in einem Knotenpunkt zusammen stoßen, wo keine Verkehrs- last wirkt, erreichen mit diesen ihre Grenzspannungen. Es werden also für die Verticalspannung S_v dieselben Werthe von X_1 und X_2 erforderlich sein, welche zu S_d gehören, und man hat, um S_v zu erhalten, nur durch B eine Parallele BE zu NI zu ziehen, weil dann $BEDF$ der Kräfteplan für den Knotenpunkt I ist.

Im übrigen gelten ganz wie bei gleichmäßiger Belastung die in Kap. II, §. 4 gegebenen Regeln, wie auch die graphischen Darstellungen der Maximalspannungen analog dem in Kap. II, §. 67 angedeuteten Verfahren vorgenommen werden können.





TECHN. MECHANIK.

VI. Kapitel.

Theorie
der
elastischen Linie
und der
continuirlichen Träger.

Herausgegeben
vom Ingenieur-Verein.
Polytechnikum Stuttgart.

1876.

TECHNISCHE MECHANIK

VI. Kapitel

elastischen Linie

unveränderlichen Träger

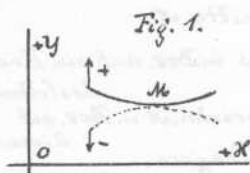
I.

Theorie der elastischen Linie mit
Anwendung auf einfache und eingespannte Träger.

§. 1.

Einleitung.Definition.

Elastische Linie oder Biegungscurve nennt man die durch Einwirkung äußerer Kräfte deformirte Schwerpunktsachse eines stabförmigen Körpers. Im folgendem wird stets der



Ursprung eines rechtwinkl. Coordinatensystems im linksseitigen Endpunkt des in Betracht gezogenen Trägertheils, die Achsen nach der Fig. 1. angenommen.

Die Krümmung der elastischen Linie bezeichnet man dann als $\begin{cases} \text{positiv} \\ \text{negativ} \end{cases}$, wenn der Krümmungsmittelpunkt in der Richtung der $\pm y$ liegt; ebenso ist das Biegemoment eines Querschnitts $\begin{cases} \text{positiv} \\ \text{negativ} \end{cases}$, wenn es am Trägertheil links vom Querschnitt $\begin{cases} \text{rechtsdrehend} \\ \text{linksdrehend} \end{cases}$ wirkt.

Die nachfolgenden Untersuchungen gelten nur für stabförmige Körper mit constantem und variablen Querschnitt, wenn

1.) die Schwerpunktsachse im unbelasteten Zustand geradlinig ist,

2.) die äußeren Kräfte sämmtlich senkrecht und in einer Verticalebene durch die SA wirken; so daß die EL eine ebene Curve ist,

3.) die Abweichung der EL von der ursprünglich geraden SA so gering ist, daß die äußeren Kräfte auch nach der Deformation noch normal zur EL angenommen werden können.

Endlich ist vorausgesetzt, daß die Spannungsvertheilung nach Navier's Hypothese (Kap. I, §. 5.) stattfindet.

§. 2.

Gleichung der elastischen Linie

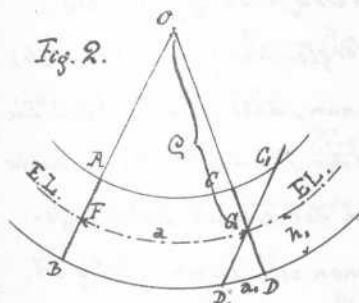
Im Punkte (x, y) der EL besteht für den Krümmungshabtmesser ϱ die Gleichung:

$$\varrho = \pm \frac{\{1 + (\frac{dy}{dx})^2\}^{\frac{3}{2}}}{d^2y/dx^2} \quad \text{oder da nach Voraus-}$$

setzung 3. (§. 1.) $(\frac{dy}{dx})^2 = \sigma$ gesetzt werden darf,

$$\varrho = \pm \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \quad (1.)$$

Fig. 2.



ecke OFG und GD, D: $\frac{h_1}{\varrho} = \frac{a_1}{a} = \frac{s}{E}$ nach Kap. I §. 4.

oder, weil die Spannung in D $\sigma = \pm \frac{Mh_1}{\varrho}$

$$\frac{1}{\varrho} = \pm \frac{M}{\varrho \cdot E} \quad (2.)$$

Aus der Vergleichung von (1.) und (2.) folgt die Gleichg. d. EL .

$$M_x = \varrho \cdot E \cdot \frac{d^2y}{dx^2} \quad (3.)$$

Anmerkung. Da M_x und ϱ dasselbe Vorzeichen haben, so ist

bei Aufstellung der Gleichung stets zu beachten, daß
 $\left. \begin{array}{l} \text{rechts} \\ \text{links} \end{array} \right\} \text{ drehende Biegemomente eine } \left. \begin{array}{l} \text{positive} \\ \text{negative} \end{array} \right\} \text{ Krümmung}$
 hervorbringen.

§. 3.

Die elastische Linie als Seilcurve.

Die EL ist eine Seilcurve, deren erzeugende Belastung die Momentenfläche und deren Horizontalzug $H = E\theta$ ist. (Mohr).

Bem. Über die Entstehung der Seilcurve s. Kap. V.

Beweis. (Fig. 3.) Ist M_x die Belastungshöhe im Punkt (x, y) eines stetig belasteten Balkens, so ergibt die Ähnlichkeit der schrägen Dreiecke indem mit dem Horizontalzug H konstruirten Kräfte- und Seilpolygon, daß

$$\frac{1}{2} \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{\int_0^x M_x dx}{H}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{H} M_x \quad \text{oder die}$$

Differentialgleichung der Seil-

$$\text{curve } M_x = H \frac{d^2 y}{dx^2} \quad (4.)$$

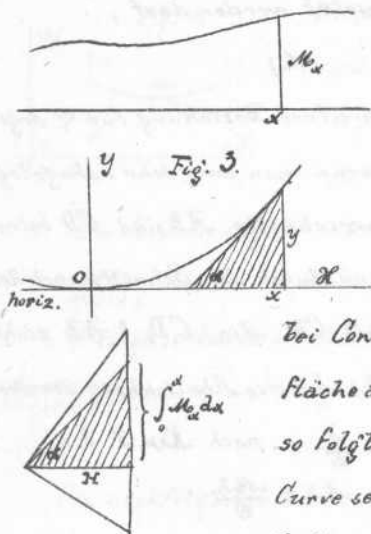
Die Vergleichung von (3) und (4.)

zeigt nun, daß $H = E\theta$ bei d. EL

Da die Momentenfläche, welche

bei Construction der EL als Belastungsfläche anzunehmen ist, immer stetig ist, so folgt, daß die E.L. stets eine stetige Curve sein muß. Dieselbe ist, wenn die Belastung des Trägers aus Einzelkräften be-

steht, aus Stücken von stetigen Curven zusammengesetzt, welche verschiedenen Gesetzen folgen.



§. 4.

Bestimmung der Formveränderung von
Trägern mit constantem Querschnitt nach rein
analytischer Methode.

Dieselbe empfiehlt sich nur bei sehr einfachen Belastungsflächen. Das hierbei einzuschlagende Verfahren erhellt aus folgendem Beispiel.

In dem durch Fig. (4.) gekennzeichneten Belastungsfall ist

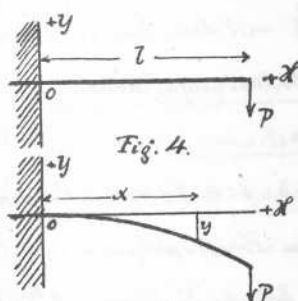


Fig. 4.

Gleichung der E.L.

$$OE \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = -P(1-x)$$

zweimal nach x integriert:

$$OE \frac{dy}{dx} = -Px + \frac{Px^2}{2} + C$$

$$OE \cdot y = -Pl \frac{x^2}{2} + \frac{Px^3}{6} + Cx + C_1$$

Für $x=0$ ist $y=0$ und $\frac{dy}{dx}=0$, weil

die Tangente an der Einspannungsstelle horizontal ist, also

$$\begin{cases} 0 = -Pl \cdot 0 + P \cdot 0 + C & \text{gibt } C = 0 \\ 0 = -Pl \cdot 0 + P \cdot 0 + C_0 + C_1 & \text{gibt } C_1 = 0, \text{ demnach die} \end{cases}$$

Gleichung der E.L.:

$$OE \cdot y = -\frac{Plx^2}{2} + \frac{Px^3}{6} \quad ; \text{ aus derselben kann man}$$

beispielsweise die größte Durchbiegung y_{\max} berechnen, welche für $x=l$ eintritt:

$$\begin{aligned} OE \cdot y_{\max} &= -\frac{Pl^3}{2} + \frac{Pl^3}{6} = -\frac{Pl^3}{3} \\ y_{\max} &= -\frac{Pl^3}{3OE} \end{aligned}$$

§. 5.

Bestimmung d. Formveränderung von Trägern mit con-
stantem Querschnitt nach rein graphischer Methode.

Dieselbe empfiehlt sich bei complicirten Belastungsformen. Sie beruht auf dem in §. 3 entwickelten Satze und es zerfällt das Verfahren in folgende Theile:

1.) Ermittlung der Momentenfläche.

Dies kann nach Kap. V. geschehen. Es empfiehlt sich dabei, positive Momente von der Abscissenachse aus nach oben, negative nach unten abzutragen, jedenfalls aber positive und negative Momentenflächen durch verschiedene Schraffirung oder Färbung zu unterscheiden.

2.) Aufzeichnung der Seilcurve mit dem Horizontalzug $H = EO$ für die Momentenfläche als Belastungsfläche.

Bemerkung über die Maßstäbe.

Hat man den Träger im Maßstab $1:2$ (1^m der Zeichnung $= 2^m$ der Wirklichkeit), die Lasten im Kräftepolygon zur Construction der Momentenfläche in einem belieb. Maßstab $1^{cm} = 6^{kg}$ (nicht $1:6$) aufgetragen und den Horizontalzug $= h^{kg} (= \frac{h}{6}^{cm})$ angenommen, so ergeben sich aus der 1. Seilcurve die M im Maßstab $1^{cm} = ah^{cmkg}$. Trägt man nun bei Construction der E.L. die neuen Belastungen im Maßstab $1^{cm} = c^{cm}$ der Momentenfläche auf und macht den Horizontalzug $H = \frac{1}{n}OE$ (alles in cm und kg gerechnet), so hat man die Ordinaten der 2. Seilcurve mit $\frac{a^3 h \cdot c}{n}$ zu multipliciren, um die Ordinaten der E.L. in natürlicher Größe zu erhalten, oder: hat man für a, h und n bequeme Maße gewählt und will die wirkl. Ordinaten der E.L. erhalten, so hat man $C = \frac{n}{a^3 \cdot h}$ zu nehmen.

Beim Aufzeichnen des Kräfteplans und der Seilcurve ist zu beachten:

1.) Müssen Anfangspunct und Endpunct der Seilcurve in

einer Horizontalen liegen, so ist die Schlußlinie des Seilpolygons horizontal zu legen.

2.) Ist der Balken an einem, bzw. beiden Enden horizontal eingespannt, so muß auch im Kräftepolygon die Endspannung an einem, bzw. beiden Enden horizontal sein.

Die größte Durchbiegung des Trägers ist der Verticalabstand der Schlußlinie von einer zur letzteren parallelen Tangente an die Seilcurve.

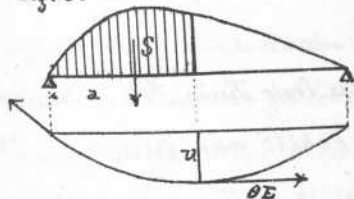
§. 6.

Bestimmung der größten Durchbiegung von Trägern mit constantem Querschnitt nach der combinirt graphisch - analytischen Methode.

Will man nur die größte Durchbiegung des Trägers ermitteln, so kann in allen den Fällen, wo die Form der Momentenfläche eine einfache (Dreieck, Parabel) und sofort zu erkennen ist, folgendes Verfahren eingeschlagen werden: man bestimmt

- 1.) die Momentenfläche,
- 2.) den Ort der größten Ausbiegung. (s. Kap. V. §. 12. (In den meisten Fällen ergibt denselben genaugenug das mech. Gefühl.)
- 3.) Man ermittelt die Ausbiegung w an dieser Stelle durch eine Momentengleichung um einen Endpunkt der betrachteten EL , in welchem H nicht angreift, indem man sich dieselbe als

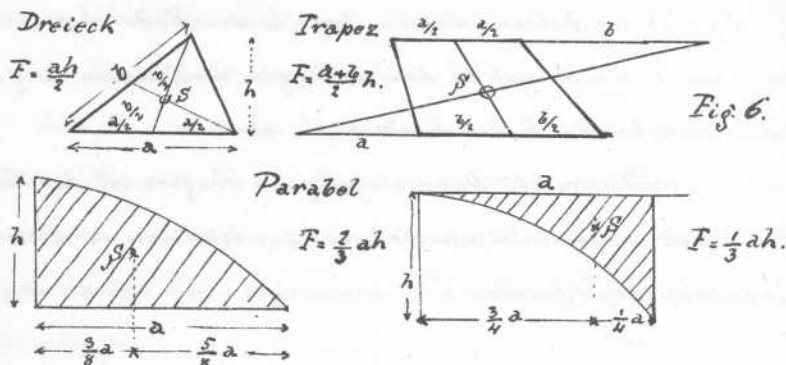
Fig. 5.



Seilcurve im Punkt der größten Ausbiegung durchschnitten und den Horizontalzug OE angebracht denkt. Diese Gleichg hat die Form

$$0 = OE \cdot w - \text{Momen. d. Abschn. d. Trägers} \times \text{Arm seines S.}$$

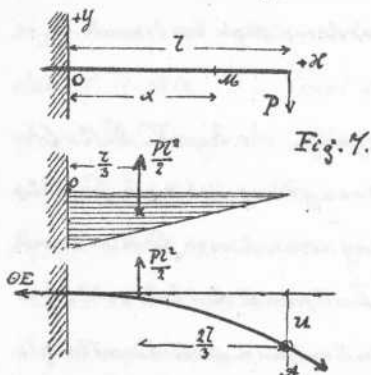
Bemerkung. In folgenden Skizzen ist die Schwerpunktslage der am häufigsten in Betracht kommenden Momentenflächen



angegeben.

A.

Bestimmung der größten Durchbiegung bei einfachen, an einem Ende eingespannten Trägern mit constantem Querschnitt. Der Ort der größten Ausbiegung ist, wenn die Belastung einerlei Richtung hat, stets das freie Ende des Trägers.



1.) Horizontalen Träger am freien Ende mit P belastet.

Da das Moment im Punkte x $M_x = -P(l-x)$, demnach die Momentenlinie eine Gerade sein muß, so ist die Momentenfläche ein Dreieck, dessen Schwerpunkt die

Abscisse $\frac{1}{3}l$ hat und dessen Flächeninhalt dadurch bestimmt ist, daß für $x=0$ $M_0 = Pl$.

Durch die Momentengleichung um das freie Ende A

$$0 = OE \cdot u - \frac{Pl^2}{2} \cdot \frac{2l}{3} \quad \text{erhält man absolut}$$

$$u = \frac{Pl^3}{30E}$$

2.) Horizontaler Träger gleichförmig mit p pro Lgn.-Einh. belastet. Dafür den Punkt x

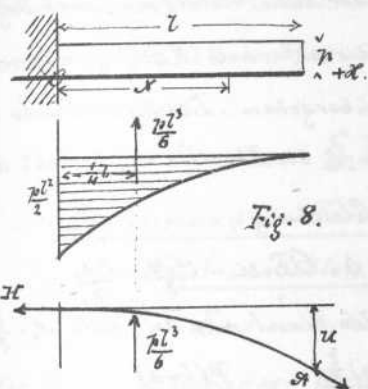


Fig. 8.

$M_x = -\frac{p(l-x)^2}{2}$, so muß die Momentenlinie eine Parabel sein, deren Scheitel im freien Balkenende liegt; die Max. Ord. ist für $x=0$

$$M_0 = -\frac{pl^2}{2} \quad \text{Die Momen.}$$

tenfläche hat die Größe

$$\frac{1}{3} \frac{pl^2}{2} l = \frac{pl^3}{6} \quad \text{mit dem Schwer.}$$

punct in $x = \frac{1}{4}l$. Die Mom. Gleichg. in Bezhg auf A ergibt:

$$0 = 0E \cdot u - \frac{pl^3}{6} \cdot \frac{3l}{4} \quad \text{und} \quad u = \frac{pl^4}{80E}$$

B.

Bestimmung der größten Durchbiegung bei einfachen Trägern auf zwei gleich hohen Stützen.

Der Ort der größten Durchbiegung kann, wie die Rech. nung zeigt, höchstens um 0,08 l von der Trägermitte abweichen. Diese größte Abweichung entspricht der ausschließlichen Belastung des Trägers durch eine Kraft in unmittelbarer Nähe einer Stütze. Für gewöhnlich kann mit genügender Genauigkeit die größte Durchbiegung in der Mitte angenommen werden.

1.) Berechnung für die Belastung mit Einzelkräften.

Da die Ordinaten der B.L., welche durch die gleichzeitige Wirkung mehrerer Einzellasten erzeugt wird, gleich sind der algebraischen Summe der gleichnamigen Ordinaten, welche der Wirkung je nur einer dieser Lasten entsprechen, so soll hier nur u für eine Einzellast berechnet werden.

Die Momentenfläche ist ein Dreieck, dessen Höhe (dem Angriffspunkt von Pentsprechend) $= \frac{Pa(l-a)}{2}$ ist.

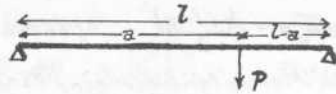
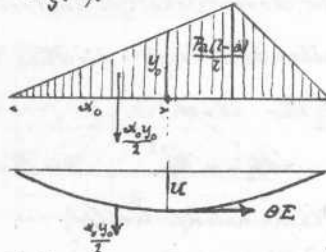


Fig. 9.



Die B.L. besteht aus zwei Bögen, die unterhalb P stetig in einander übergehen. Für die Ordinate u und die Abscisse x_0 besteht die Gleichung:

$$0 = OE \cdot u - \frac{x_0 y_0}{2} \cdot \frac{l x_0}{3}$$

oder nimmt man an, daß $x_0 = \frac{l}{2}$,

so erhält man, weil $y_0 = \frac{Pa(l-a) \frac{l}{2}}{2a} = \frac{Pl(l-a)}{2}$

$$0 = OE \cdot u - \frac{Pl(l-a)}{8} \cdot \frac{l}{3} \quad \text{oder}$$

$$u = \frac{Pl^2(l-a)}{24 OE}$$

Durch genaue Berechnung findet man, daß $x_0 = \sqrt{\frac{a}{3}(2l-a)}$ hätte angenommen werden sollen, und ist für diese Abscisse

$$u = \frac{Pa(l-a)}{9 l \cdot OE} \sqrt{\frac{a}{3}(2l-a)^3}$$

2.) Berechnung für gleichförmig verteilte Belastung.

Die Momentenfläche ist eine Parabel mit vertikaler Achse

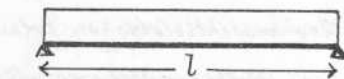
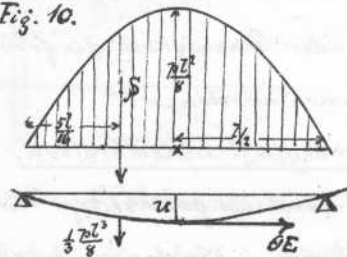


Fig. 10.



in $x = \frac{l}{2}$, da für x

$$M_x = \frac{p l x}{2} - \frac{p x^2}{2}$$

$$\text{für } x = \frac{l}{2} \quad M = \frac{p l^2}{8}$$

Die Belastung einer Hälfte der B.L. ist demnach $\frac{1}{3} \frac{p l^2}{8}$, ihr Angriffspunkt in $x = \frac{5l}{16}$ und man erhält zur Berechnung der

größten Durchbiegung in der Mitte die Gleichung

$$0 = OE \cdot u - \frac{p l^2}{24} \cdot \frac{5l}{16} \quad \text{und}$$

$$u = \frac{5 p l^4}{384 OE}$$

3.) Berechnung bei ungleichf. vertheilter Belastung.

Man ersetzt entweder annähernd gleiche Belastungsstreifen durch ihre Mittelkräfte und verfährt wie in 1.), oder man wendet die graphische Methode an:

§. 7.

Bestimmung der Formveränderungen bei Trägern mit variablem Querschnitt.

Eine analytische Bestimmung der Ordinaten der E.L. (insbesondere der größten Durchbiegung) ist hier zu complicirt.

Dagegen hat man graphisch zwei Wege:

1.) Man zeichnet eine Belastungsfläche für die E.L., deren Ordinaten anstatt M $k = \frac{M}{\Theta}$ sind und construirt für diese die Seilcurve mit dem Horizontalzug $H = E$, oder einem Bruchtheil des E .

2.) Annäherungsverfahren. Man macht wie bisher $k = M$, und $H = \Theta E$, läßt aber, da Θ veränderlich, H nur streckenweise constant (je nach der erforderlichen Genauigkeit auf längere oder kürzere Strecken) und construirt für diese die entsprechenden Curvenstücke der E.L.

§. 8.

Allgemeines über die Bestimmung unbekannter Aussenkräfte bei Trägern, die an den Enden eingespannt sind.

Die Einspannung kann ersetzt gedacht werden durch Kräfte R_1 und R_2 , in solcher Entfernung d außerhalb der

Stützen angreifend, das

$R_1 d = M_1$ und $R_2 d = M_2$ den Auflagermomenten entsprechen. Unbekannt sind demnach die Größen R_1 ,

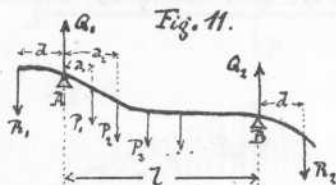


Fig. 11.

R_2 und d und die Auflagerdrücke Q_1 und Q_2 und zu deren Berechnung 5 Bedingungsgleichungen erforderlich. Man hat die Momentengleichg.

um A: $0 = -R_1 d + \sum_0^l (P_i a) - Q_1 l + R_2 (l + d)$

um B: $0 = -R_1 (d + l) - \sum_0^l P_i (l - a) + Q_1 l + R_2 d$ und die Projektions-

gleichg. $0 = \sum P + R_1 + R_2 - Q_1 - Q_2$

Die ferner erforderlichen zwei Bedingungsgleichungen gibt die Theorie der El. Linie an die Hand, welche gestattet, die Auflagermomente $M_1 = R_1 d$ und $M_2 = R_2 d$ zu berechnen (s. §. 9.) Umgekehrt ist hierdurch bewiesen, daß wenn die Auflagermomente bestimmt sind, alle sonst zur Berechnung erforderlichen Stücke abgeleitet werden können.

Die Zwischenmomente werden wie folgt ermittelt, wenn M_1 und M_2 gegeben: Man zeichne die Momentenflächen, welche durch die Auflagermomente u. die Belastungen entstehen. Die algebr. Summe der so erhaltenen Momente über einem Querschnitt gibt die Größe seines Moments an.

§. 9.

2. Allgemeines über die Bestimmung der Auflagermomente eingespannter Träger.

Dieses kann geschehen:

1.) rein analytisch auf Grund der Differentialgleichg der E.L. (ein Beispl. s. St. 234).

2.) auf Grund des in §. 3 ausgesprochenen Satzes, nach welchem die E.L. eine Seilcurve ist, wie folgt:

α.) Man ersetze die Einspannung durch Kräfte R , von solcher Grösse und mit solcher Entfernung vom Auflager,

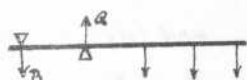


Fig. 12.

dass $R_1 d_1 = M_1$; $R_2 d_2 = M_2$
(Freimachen des Trägers).

β.) Bestimme die Form der Momentenfläche für jede Aussenkraft gesondert, sowie deren Grösse und Schwerpunkt. Diese Flächen sind nach §. 3 die Belastungen für die E.L.

γ.) Stelle die Momentengleichungen für die Auflagerepunkte auf, welche den Gleichgewichtszustand der E.L. darstellen. Aus diesen ergeben sich die Auflagermomente.

b. Bestimmung der Auflagermomente für horizontale Träger nach Fig. 13.

Fig. 13.

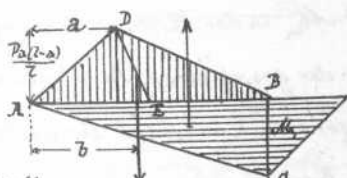
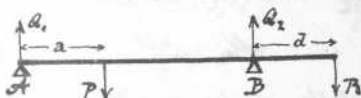
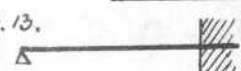
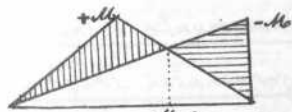
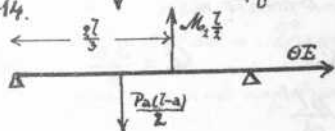


Fig. 14.



Drittel von DE im Abstande

Auflager. Von der durch Q_2 erzeugten Momentenfläche kommt

1.) Belastung durch die Einspannkraft P in a.

Für die Einspannung substituieren wir R im Abstand d vom Auflager so, dass die E.L. in B eine horizontale Tangente hat.

Die Momentenfläche von P ist ein Dreieck, dessen Spitze die Abscisse a , die Ordinate $\frac{Pa(1-a)}{2}$ hat. Der Angriffspunkt dieser Belastungsfläche von der Grösse

$\frac{Pa(1-a)}{2}$ liegt auf dem zweiten Drittel von DE im Abstande

$$b = \frac{l}{2} - \frac{\frac{l}{2} - a}{3} = \frac{l+a}{3} \text{ vom linken}$$

für den Träger nur in Betracht $\Delta ABC = M_2 \frac{l}{2}$; der Schwerpunkt desselben liegt in der Entfernung $\frac{2l}{3}$ von A

Das Gleichgewicht der E.L. ist demnach bestimmt durch die Momentengleichung um A:

$$0 = OE \cdot 0 + \frac{Pa(l-a)}{2} b - \frac{M_2 l}{2} \cdot \frac{2l}{3} \quad \text{und folgt daraus}$$

$$M_2 = \frac{Pa(l-a)(l+a)}{2l^2} \quad \text{Da } M_1 = 0, \text{ so ist}$$

hierdurch die Trägerberechnung bestimmt.

2.) Belastung gleichförmig mit p pro Längeneinheit.

Die Momentenfläche der Belastung ist ein Parabelsegment

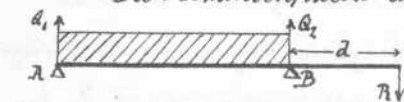
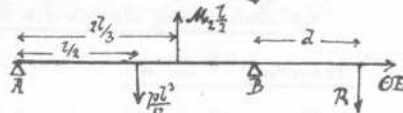
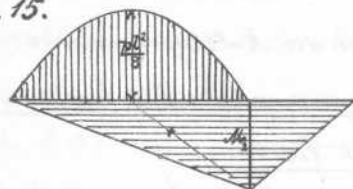


Fig. 15.



von der Max. Ordinate $\frac{pl^2}{8}$ in $\frac{l}{2}$ und dem Flächeninhalt $\frac{pl^3}{12}$

Im übrigen ist die Aufgabe der

in 1.) identisch. Man hat die

Momentengleichung um A.)

$$0 = OE \cdot 0 - \frac{M_2 l}{2} \cdot \frac{2l}{3} + \frac{pl^3}{12} \cdot \frac{l}{2}$$

und folgt daraus

$$M_2 = \frac{pl^2}{8} \quad \text{Das Auf.}$$

lagermoment an der Einspannungsstelle ist also dem Max. bei freiem Auflager gleich. Das Biegemoment M_m in der Mitte wird dagegen auf die Hälfte reduziert, wie schon aus der graphischen Darstellung ersichtlich. Dasselbe wäre übrigens auch wie folgt abzuleiten:

durch eine Momentengleichg. um B erhält man

$$M_2 = Rd = -\frac{pl^2}{8} = -\frac{pl^2}{2} + Ql; \quad Q = \frac{3pl}{8} \quad \text{folglich}$$

$$M_m = \frac{3pl}{8} \cdot \frac{l}{2} - \frac{pl}{2} \cdot \frac{l}{4} = \frac{pl^2}{16}$$

C. Bestimmung der Auflagermomente beim horizontalen, an beiden Enden eingespannten Träger.

1.) Belastung P im Abstd a vom linken Auflager.

Die Einspannung wird ersetzt durch $R_1 d = M_1$; $R_2 d = M_2$

Die Belastungsfläche für die E.L. besteht aus der positiven Momentenfläche der Belastung P

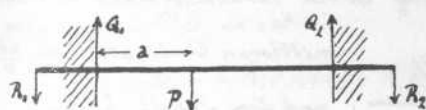


Fig. 16.

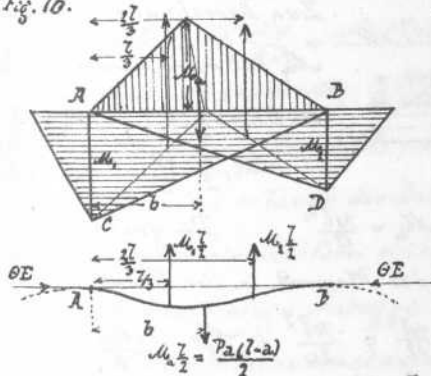
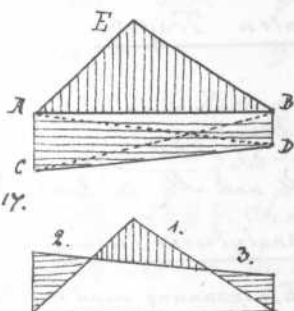


Fig. 17.



$$M_a \frac{l}{2} = \frac{P_a(l-a)}{l} \cdot \frac{l}{2} = \frac{P_a(l-a)}{2}$$

angreifend im Abstand

$$b = \frac{l+a}{3} \text{ von } A \text{ und den}$$

negativen Mom.fl. von Q_1 u. Q_2

$$\Delta ABC = M_a \frac{l}{2} \text{ angreifend}$$

in $\frac{l}{3}$ von A und

$$\Delta ABD = M_a \frac{l}{2} \text{ angr. in } \frac{2l}{3} \text{ von}$$

A ; sonach ist das Gleichge-

wicht der E.L., welche in A und

B horizontale Tangenten hat,

bestimmt durch:

Mom. um A :

$$0 = OE \cdot 0 + M_a \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{3} + M_2 \frac{l}{2} \cdot \frac{2l}{3} - M_1 \frac{l}{2} \cdot b$$

Mom. um B :

$$0 = OE \cdot 0 - M_1 \frac{l}{2} \cdot \frac{2l}{3} - M_2 \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{3} + M_a \frac{l}{2} (l-b)$$

aus diesen Gleichn folgt, daß

$$M_1 = M_a \frac{2l-3b}{l}$$

$$M_2 = M_a \frac{3b-l}{l}$$

$$M_1 + M_2 = M_a \text{ sein muß oder weil auch}$$

$$M_1 \frac{l}{2} + M_2 \frac{l}{2} = M_a \frac{l}{2}$$

$$\Delta ABC + \Delta ABD = \text{Trapez } ABDC = \Delta ABE$$

Liegt man positive und negative Flächen auf dieselbe Seite, so erkennt man, daß dieser Bedingung genügt wird, wenn (Fig. 17.)

Fläche 1 = Summe der Flächen 2 und 3.

Greift P in der Trägermitte an, so wird das Trapez $ABCD$ ein Rechteck

$$M_1 = M_2 = \frac{M_a}{2} = \frac{Pl}{8}, \quad \text{durch die Einspannung}$$

wird hier also das Max.moment auf die Hälfte reducirt.

2.) Belastung gleichförmig mit p pro Längeneinheit.

Die Momentenfläche der Belastung ist ein Parabelsegment mit der

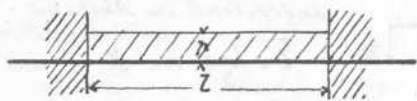


Fig. 18.



mittleren Ordinate $M_a = \frac{pl^2}{8}$

und dem Inhalt $\frac{2}{3} M_a l$.

Zur Berechnung von M_1 und

M_2 hat man wieder die Gleich.

$$0 = 0B.0 + \frac{2}{3} M_a l \cdot \frac{1}{2} - M_1 \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{3} - M_2 \frac{l}{2} \cdot \frac{2}{3} \quad \text{aus welcher}$$

folgt $M_1 = M_2 = \frac{2}{3} M_a = \frac{pl^2}{12}$ Die graphische

Darstellung zeigt sofort, daß das Moment in der Trägersmitte

$$M_m = M_a - M_1 = \frac{pl^2}{8} - \frac{pl^2}{12} = \frac{pl^2}{24} = \frac{M_1}{2} = \frac{M_a}{3} \text{ ist.}$$

d. Berechnung der Auflagermomente des beiderseits schieß eingespannten Trägers.

bei beliebig vertheilter Belastung.

Gegeben l, h, α_1, α_2 und die Belastung.

Gesucht die Auflagermomente M_1 und M_2 in A und B.

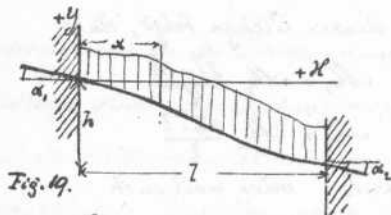
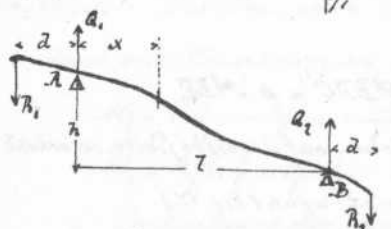


Fig. 19.



Rein analytische Lösung.

Die Einspannung wird ersetzt durch die Kräfte R_1 und R_2 , welche die Auflagermomente

$$M_1 = R_1 d \quad \text{und} \quad M_2 = R_2 d$$

erzeugen und dem Träger in A und

B die ursprüngliche Neigung α_1 und α_2

geben. In Bezüg. auf das recht.

winklige Coordinatensystem durch A ist nun die Differentialgleichung der B.L. (S. 1.)

$$M_x = 0E \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} \quad ; \quad \text{zugleich ist}$$

$$M_x = -R(d+x) + q \cdot x - M_a \quad , \quad \text{wo } M_a \text{ das stat. Momt}$$

der Belastung von 0 bis x in Beziehung auf x bedeutet. Ist ebenso M das statische Moment der ganzen Belastung in Beziehung auf B , so ist

$$M_2 = -R_1(l+x) + Q_1l - M; \quad \text{durch Elimination}$$

von Q_1 erhält man aus beiden Gleichungen

$$(5.) \quad M_x = EI \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M_1(l-x) + (M_2 + M)x}{l} - M_x,$$

hierbei sind M_1 und M_2 $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{positiv} \\ \text{negativ} \end{smallmatrix} \right\}$ zu setzen, wenn sie einer $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{posit.} \\ \text{negat.} \end{smallmatrix} \right\}$ Krümmung der E.L. entsprechen (s. §. 1.); M_x und M dagegen sind, solange die Belastung von oben nach unten wirkt, als absolute Größen einzuführen.

Durch zweimalige Integration nach x und Bestimmung der zwei Integrationsconstanten aus den Bedingungen, daß

für $x=0$ auch $y=0$ und $\frac{dy}{dx} = \lg \alpha_1$, sowie
daß für $x=l$ $y=h$ $\frac{dy}{dx} = \lg \alpha_2$ wird,

erhält man für die Auflagermomente M_1 und M_2 die Formeln

$$(6.) \quad M_1 = \frac{2EI}{l^2} \{ 3h - l(2 \lg \alpha_1 + \lg \alpha_2) \} + M'$$

$$(7.) \quad M_2 = \frac{2EI}{l^2} \{ -3h + l(\lg \alpha_1 + 2 \lg \alpha_2) \} + M''$$

wo M' und M'' die Auflagermomente beim horizontal eingespannten Balken von der Länge l $\{ h=0, \alpha_1=0, \alpha_2=0 \}$ sind, nämlich:

$$(8.) \quad M' = \frac{6}{l^2} \int_0^l dx \int_0^x M_x dx - \frac{2}{l} \int_0^l M_x dx$$

$$(9.) \quad M'' = -\frac{6}{l^2} \int_0^l dx \int_0^x M_x dx + \frac{4}{l} \int_0^l M_x dx$$

Die Zwischenmomente ergeben sich aus den Auflagermomenten durch Gleichg. (5.).

§. 10.

Einfluß einer Binspannung der Trägerenden.

Wenn die Binspannung in der Richtung der unge-

bogenen Trägerachse geschieht, also bei horizontalen Balken horizontal, so sind die Auflagermomente unabhängig von der Größe des Horizontalschubs $H = OE$ { vergl. Gl. (6) und (7) in S. 9, wenn $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, $\tan \alpha = h$ } und werden alsdann die Maximalbiegemomente entweder

1.) nach dem Auflager gerückt, wie bei der Einspannung an einem Ende z. B. bei folgendem Fall:

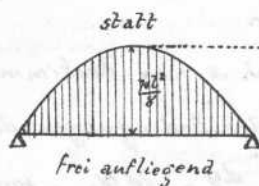
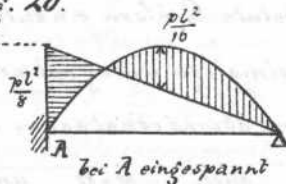


Fig. 20.

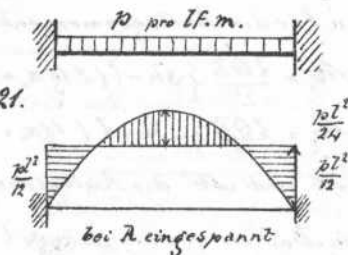


oder wird:

2.) das Max. Biegemoment überhaupt verringert, wie bei folg. Fall:



Fig. 21.



In jedem Fall stellen sich die Verhältnisse günstiger als beim frei aufliegenden Träger.

Ist dagegen der eingespannte Theil gegen die Trägerachse geneigt, so wird der Horizontalschub OE wirksam. Der Versuch liegt nahe, denselben zu benützen, um ein noch besseres statisches Resultat zu erzielen, z. B. beim horizontalen beiderseits eingespannten und gleichförmig belasteten Träger der Einspannung eine solche Neigung α zu geben, daß das Biegemoment der Mitte und die Auflagermomente gleich werden.

Diese Neigung der Auflagerflächen wird bestimmt durch die Gleichg $\tan \alpha = \frac{pl^3}{96 OE}$

Bei solcher Anordnung wird zugleich die größte Durchbiegung, welche beim freiaufliegenden Träger

$u = \frac{5pl^4}{384 OE}$ beträgt, auf $u_1 = \frac{2pl^4}{384 OE}$, also auf $\frac{2}{5}$ tel des ersten Werthes reducirt.

Practisch aber ist die Einspannung unter dem Winkel α unausführbar, weil derselbe zu klein ist. Man kann eine Ausgleichung der Maximalmomente nur auf dem Wege erzielen, daß man zunächst den Träger frei auflegt, seine max. Durchbiegung bestimmt, hierauf der Trägerachse eine Sprengung nach oben gibt, welche die Durchbiegung auf $\frac{2}{5}$ tel reducirt, und alsdann den Träger einspannt.

II.

Anwendung der Theorie der elast. Linie
auf die

Berechnung continuirlicher Träger .

§. 11.

Einleitung .

Continuirliche Träger sind solche, welche ohne Unterbrechung auf mehr als zwei Stützen aufliegen; das Stück zwischen je 2 Stützen heißt Feld od. Oeffnung.

Voraussetzungen für die Berechnung:

- 1.) Die Stützpunkte liegen sämmtlich in gleichen Höhe.

2.) Der Querschnitt des Trägers (also auch Θ) ist der ganzen Länge nach constant.

NB. Bei der nachfolg. analyt. Berechnung muß diese Voraussetzung nur für jede Öffnungsweite zutreffen.

3.) Die Belastung (Eigenlast und mobile Last) ist auf die Länge jeder Öffnung gleichförmig vertheilt.

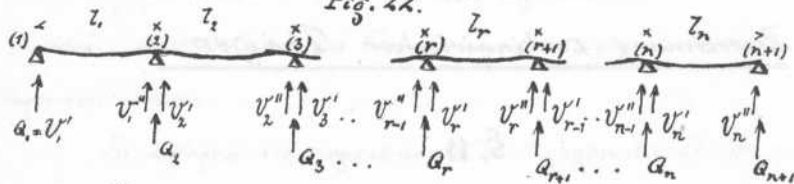
Anm. 1. Diese Voraussetzung, welche am meisten zur Vereinfachung der Berechnung beiträgt, weicht zwar bezügl. der mobilen Last von der Wirklichkeit bedeutend ab; die dadurch verursachten Ungenauigkeiten sind jedoch bei größeren Spannweiten (über 40^m) - und nur für solche sind continuirliche Träger überhaupt rathsam - praktisch nicht erheblich, indem man trotzdem alle diejenigen Max. von M , V und Q erhält, welche für die Stärke der Constructionstheile bestimmend sind.

Anm. 2. Bei der graph. Berechnung ist die mob. Last nur gleichmäßig, aber nicht auf ein ganzes Feld vertheilt angenommen.

§. 12.

Bezeichnungen.

Fig. 22.



Gegeben:

Öffnungsweiten $l_1, l_2, \dots, l_n, \dots, l_{n-1}, l_n$

Belastungen: a , Eigenlast $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots, p_{n-1}, p_n$ p. Längen
einheit

b , mob. Last $k_1, k_2, \dots, k_n, \dots, k_{n-1}, k_n$. . .

c , tot. Last $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots, t_{n-1}, t_n$. . .

Zu berechnen sind:

die Auflagerreactionen $Q_1, Q_2, Q_3 \dots Q_r, Q_{r+1} \dots Q_{n-1}, Q_n, Q_{n+1}$

die Summe aller Verticalkräfte bis unmittelbar rechts vom

Auflager $V'_1, V'_2, V'_3 \dots V'_r, V'_{r+1} \dots V'_n$

bis unmittelbar links vom Auflager

$V''_1, V''_2, V''_3 \dots V''_{r-1}, V''_r, V''_{n-1}, V''_n$

die Auflagermomente $M_1, M_2, M_3 \dots M_r, M_{r+1} \dots M_{n-1}, M_n, M_{n+1}$

die Zwischenmomente M_x

die verticalen Schubkräfte V_x

§. 13.

Allgemeines über die Trägereberechnung.

Die Aufgabe ist bestimmt, wenn entweder die Auflagerreactionen (§. 14.) oder die Auflagermomente (§. 15.) mit Zuhilfenahme der Theorie der Bl. Linie ermittelt sind.

Die analytische Berechnung stützt sich daher auf die Gleichg.

$$M_x = OE \frac{dy}{dx^2},$$

die graphische auf den Satz in §. 3.

Letzteres Verfahren, welches bei sorgfältiger Ausführung hinreichend genaue Resultate liefert, hat den Vorzug größser Anschaulichkeit und Übersichtlichkeit der Kräfte und Spannungsvhältnisse im ganzen Träger, und ist dessen Anwendung namentlich für Träger von mehr als 3 Öffnungen zu empfehlen.

Da es nicht darauf ankommt, für irgend einen bestimmten Belastungsfall die nach §. 12. zu berechnenden Größen zu finden, sondern die Maxima und Minima derselben, so ist für jede Öffnung zunächst die Belastungsart zu ermitteln, welche diese Maxima erzeugt.

A.

Analytische Berechnung.

§. 14.

Ältere Methode der analytischen Berechnung.

Dieselbe ist nur für zwei und drei Öffnungen genügend einfach. Es werden zunächst die Auflagerdrücke wie folgt ermittelt.

Für eine bestimmte Belastungsart (§. 11, 3) wird die Bedingung ausgesprochen, daß

1.) sämtliche Verticalkräfte eine Resultante = 0 geben müssen und

2.) die Momenten Summe aller Außenkräfte um jedes Auflager = 0 sein muß.

Die Verbindung von $n+1$ dieser Gleichungen ergibt alsdann die $n+1$ Auflagerreactionen.

Stellt man endlich so viele Differentialgleichgn. der el. Lin. auf als Öffnungen vorhanden sind, und bestimmt die Größe der Integrations constanten nach den Bedingungen, welche sich aus der Form der B.L. ergeben, so erhält man die einfache Gleichg. der B.L. für alle Öffnungen, aus welcher z.B. die Einsenkungen nach Lage und Größe hervorgehen.

Die Berechnung der Max. Momente und Max. Schubkräfte kann alsdann durch Betrachtung des Gleichgew. einzelner Trägersfelder unter entsprechender Lastvertheilung wie beim eingespannten Träger in Theil I. geschehen.

§. 15.

Clapeyron'sche Methode.

Bei diesen werden zunächst die Auflagermomente berechnet. Da ein Mittelfeld l_r als ein in beiden Enden eingespannter Balken betrachtet werden kann, so gelten für dasselbe die in S. 9, 2 abgeleiteten Gleichungen (6) und (7) für M_r und M_{r+1} . Stellt man für zwei aufeinanderfolgende Öffnungen l_r und l_{r+1} je diese zwei Gleichgn. auf und eliminiert aus ihnen $\lg \alpha_r, \lg \alpha_{r+1}, \lg \alpha_{r+2}$ so erhält man die allgemeine Clapeyron'sche Momentengleichung für die drei Auflagermomente je zweier aufeinanderfolgender Felder:

$$(10.) \quad M_r l_r + 2 M_{r+1} (l_r + l_{r+1}) + M_{r+2} l_{r+1} = (M_r' + 2 M_r'') l_r + (2 M_{r+1}' + M_{r+1}'') l_{r+1}$$

wo M_r' und M_r'' die Auflagermomente eines wie Feld l_r belasteten horiz. eingespannten Balkens bedeuten.

Für einen Träger über n Öffnungen und $n+1$ Stützen, kann man $n-1$ Gleichungen dieser Art aufstellen. Da ferner bei freien Endauflagern $M_1 = M_{n+1} = 0$, so läßt sich die Größe aller unbekannten Auflagermomente bestimmen.

Hierauf berechnen sich die Zwischenmomente nach Glahg. (5). Sto. 235.

$$(11.) \quad M_x = \frac{M_r(l_r - x) + (M_{r+1} + M_r)x}{l_r} - M_x^s$$

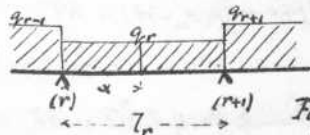


Fig. 23.

wo M_r^s das statische Moment der Belastung von (r) bis $(r+1)$, M_x^s das der Belastung von (r) bis $(r)+x$ in Bez. auf (r) ist.

Für die S. 11, 3 vorausgesetzte Belastung wird speziell

$$(10^a.) \quad M_r l_r + 2 M_{r+1} (l_r + l_{r+1}) + M_{r+2} l_{r+1} = - \frac{q_r l_r^3 + q_{r+1} l_{r+1}^3}{4}$$

$$(11^a.) \quad M_x = \frac{M_r(l_r - x) + M_{r+1}x}{l_r} + \frac{q_r x}{2} (l_r - x)$$

M_x wird ein Maximum, wenn $\frac{dM_x}{dx} = 0$, also

$$-\frac{M_r + M_{r+1}}{l_r} + \frac{q_r l_r}{2} - q_r x = 0$$

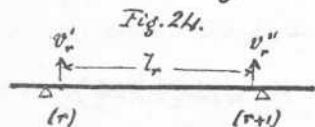
d.h. für

$$(12.) \quad x_0 = \frac{-M_r + M_{r+1}}{q_r l_r} + \frac{l_r}{2}$$

Durch Einsetzen dieses Werthes in Gl. (11^a) erhält man

$$(13.) \quad \max M_x = M_r + \frac{q_r x_0^2}{2}$$

Die vorticalen Schubkräfte ergeben sich durch folgende Betrachtung:



Auf den unmittelbar zw. (r) und (r+1) liegenden Trägerschnitt l_r wirken:

1.) die Belastung ($q_r l_r$)

2.) die vort. Schubkräfte V'_r u. V''_r

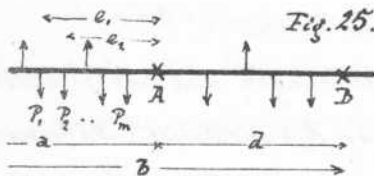


Fig. 25.

3.) die Biegemomente M_r u. M_{r+1}
Hilfssatz: Ist ein Balken von beliebigen Kräften P angegriffen (Fig. 25) und man

kennt das Moment M_a aller Kräfte vom Nullpunkt bis A, so ist das Moment in Bez. auf B

$$M_b = M_a + d \sum_0^m P + M', \quad \text{wo } M' \text{ das Momt der Kräfte}$$

to zw. A und B in Bez. auf B.

$$\begin{aligned} \text{Beweis: } M_b &= P_1(e_1+d) + P_2(e_2+d) + \dots + P_m(e_m+d) + M' \\ &= \sum_0^m P(e+d) + M' \\ &= \sum_0^m P e + \sum_0^m P d + M' = \sum_0^m P e + d \sum_0^m P + M' \\ &= M_a + d \sum_0^m P + M'. \end{aligned}$$

Für den vorliegenden Fall ist also

$$(14.) \quad \begin{aligned} M_{r+1} &= M_r + V'_r l_r - \frac{q_r l_r^2}{2} \\ V'_r &= \frac{M_{r+1} - M_r + \frac{q_r l_r^2}{2}}{l_r} \end{aligned} \quad V \text{ ist positiv, wenn}$$

die sämtlichen Kräfte links eine nach oben wirkende Resultante geben.

In einem beliebigen Zwischenpunkt x ist

$$(15.) \quad V_x = V_r' - R_x, \quad \text{wo } R_x \text{ die Summe der Be-}$$

lastungen von (r) bis x , bei gleichm. Belastung also

$$R_x = q_r x \text{ ist.}$$

Am rechten Auflager ist ebenso

$$(16.) \quad \begin{cases} V_r'' = \frac{M_{r+1} - M_r - \frac{q_r l_r^2}{2}}{l_r} & \text{oder} \\ V_r'' = V_r' - q_r l_r \end{cases}$$

Die Auflagerreactionen endlich sind die Differenzen der verticalen Schubkräfte unmittelbar rechts und links von dem betr. Auflager.

$$(17.) \quad Q_r = V_r' - V_{r-1}'' \quad \text{worin die } V \text{ durch die Gleichg.}$$

(14) und (16) bestimmt sind.

Anmerk. Die Maximalwerte M_{\max} , V_{\max} , Q_{\max} werden dadurch erhalten, daß man die im betr. Falle ungünstigste Belastungsart bei Benützung vorstehender Gleichung einführt.

§. 16.

Beispiel I. Analytische Berechnung eines kontinuierlichen Trägers von zwei Feldern.

Gegeben sind die Belastungen p. Lfd. m. beim

Fig. 26.

	1. Feld.	2. Feld.
Eigengew.	P_1	P_2
Vorkehrst.	K_1	K_2
Totallast	t_1	t_2

$$1.) \text{ Auflagermomente. } M_1 = M_3 = 0,$$

ferner nach Gleich (10^a) S. 241:

$$2M_2(l_1+l_2) = - \frac{q_1 l_1^3 + q_2 l_2^3}{4}$$

$$M_2 = - \frac{q_1 l_1^3 + q_2 l_2^3}{8(l_1+l_2)}$$

Der größte absolute Werth von M_2 ($-M_2)_{\max}$ tritt ein bei Vollbelastung, der kleinste ($-M_2)_{\min}$ bei Belastung durch Eigengewicht allein.

Specielle Fälle.

Für $l_1 = l_2 = l$, $p_1 = p_2 = p$, $l_1 = l_2 = l$ wird

$$(-M_2)_{\max} = -\frac{pl^2}{8}; \quad (-M_2)_{\min} = -\frac{pl^2}{8}$$

Für $l_1 = l_2 = l$, $q_1 = p_1$; $q_2 = p_2$ wird

$$M_2 = -\frac{l^2(l_1+p_2)}{16}$$

2.) Die Zwischenmomente werden nach (11^a) S. 241

$$\text{in } l_1, \quad M_x = \frac{M_2 x}{l_1} + \frac{q_1 x}{2} (l_1 - x)$$

$$\text{in } l_2, \quad M_x = \frac{M_2 (l_2 - x)}{l_2} + \frac{q_2 x}{2} (l_2 - x), \text{ wobei } x \text{ jo vom zunächst links liegenden Auflager aus zu rechnen ist.}$$

Ein Maximalzwischenmoment des 1. Feldes tritt nach

$$(12) \text{ ein mit } x_0 = \frac{M_2}{q_1 l_1} + \frac{l_1}{2} \text{ und ergibt sich}$$

$$\text{nach (13) } \max M_x = \frac{q_1 x_0^2}{2}$$

Spezieller Fall. Für gleichm. Belastung q in beiden Fel-

dern $l_1 = l_2 = l$ wird $M_2 = -\frac{ql^2}{8}$, obiges $x_0 = \frac{3l}{8}$

und $\max M_x = \frac{9}{128} ql^2$, d.h. absolut kleiner als M_2

3.) Die verticalen Schubkräfte berechnen sich nach

S. 242. 2.) an den Auflagern (Gl. 14 und 16.)

$$\text{für } l_1, \quad V'_1 = \frac{M_2}{l_1} + \frac{q_1 l_1}{2}$$

$$V''_1 = \frac{M_2}{l_1} - \frac{q_1 l_1}{2}$$

$$\text{für } l_2, \quad V'_2 = -\frac{M_2}{l_2} + \frac{q_2 l_2}{2}$$

$$V''_2 = -\frac{M_2}{l_2} - \frac{q_2 l_2}{2}$$

b.) in beliebigen Zwischenpunkten (Gl. 15.)

$$\text{des 1. Feldes } V_x = V'_1 - q_1 x$$

des 2. Feldes

$$V_x = V'_x - q_2 x.$$

Über welchen Bedingungen die $\max V'$ eintreten, erkennt man leicht bei Berechnung der V für $l_1 = l_2 = l$. Es wird für

	$q_1 = q_2 = t$	$q_1 = t; q_2 = p$	$q_1 = p; q_2 = t$	$q_1 = q_2 = p$
$V'_1 =$	$+\frac{3}{8} tl$	$+\frac{7}{16} (yt - p)$	$+\frac{7}{16} (yp - t)$	$+\frac{3}{8} pl$
$V''_1 =$	$-\frac{5}{8} tl$	$-\frac{7}{16} (qt + p)$	$-\frac{7}{16} (qp + t)$	$-\frac{5}{8} pl$
$V'_2 =$	$+\frac{5}{8} tl$	$+\frac{7}{16} (t + qp)$	$+\frac{7}{16} (p + qt)$	$+\frac{5}{8} pl$
$V''_2 =$	$-\frac{3}{8} tl$	$-\frac{7}{16} (yp - t)$	$-\frac{7}{16} (yt - p)$	$-\frac{3}{8} pl$

Die numerische Berechnung zeigt, daß eintreft

$$\max V'_1 = \max(-V''_2) = \frac{7}{16} (yt - p), \text{ wenn nur das 1. Feld voll belastet}$$

$$\min V'_1 = \min(-V''_2) = \frac{7}{16} (yp - t), \quad " \quad " \quad " \quad 2. \quad " \quad "$$

$$\max(-V''_1) = \max V'_2 = \frac{5}{8} tl \quad \text{bei Vollbelastung des Trägers.}$$

$$\min(-V''_1) = \min V'_2 = \frac{5}{8} pl \quad \text{bei unbelastetem Träger.}$$

In allen Zwischenpunkten ist absolut genommen V kleiner. Würde man die verticale Schubkraft gleich der Summe aller rechts vom Querschnitt wirkenden Kräfte setzen, also bei der Berechnung von rechts nach links gehen, so würden sich sämtliche Vorzeichen umkehren.

4.) Die Auflagerreactionen werden nach Gleichg (17)

S. 243. erhalten: z. B. für $l_1 = l_2 = l$

$$\max Q_1 = \max Q_3 = \max V'_1 = \frac{7}{16} (yt - p)$$

$$\max Q_2 = \max V'_2 - \max(-V''_1) = \frac{10}{8} tl$$

Bem. Die beiden zur Berechnung von Q dienenden V müssen natürlich derselben Belastungsweise entsprechen, weil sie sonst nicht gleichzeitig eintreten könnten.

§. 17.

Beispiel II. Analytische Bestimmung eines

Continuirlichen Trägers mit drei Öffnungen.

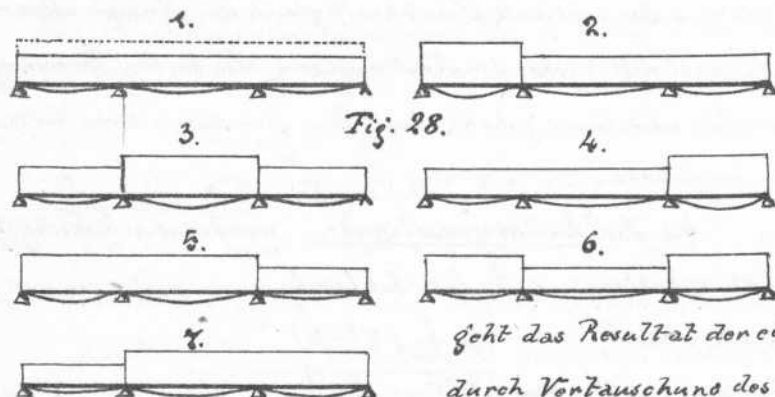
	l_1	l_2	l_3	
(1)	(2)	(3)	(4)	
Fig. 27.				<u>Gegeben</u>
die Felder	l_1	l_2	l_3	
mit Eigengewicht	$p = p_1$	$= p_2$	$= p_3$	
Verkehrslast	$K = K_1$	$= K_2$	$= K_3$	
Totallast	$T = T_1$	$= T_2$	$= T_3$	

1.) Auflagemomente $M_1 = M_4 = 0$ und nach

$$\text{Gleich (10a)} \quad 2M_2(l_1 + l_2) + M_3 l_2 = - \frac{q_1 l_1^3 + q_2 l_2^3}{4}$$

$$M_2 l_2 + 2M_3(l_2 + l_3) = - \frac{q_2 l_2^3 + q_3 l_3^3}{4}$$

Aus beiden Gleichgn erhält man Ausdrücke für M_2 und M_3 und man führt nun in dieselben die allen möglichen Belastungsfällen entsprechenden Werthe von q ein. Bei zwei symmetrischen Belastungsarten, wie Fig. 28, 1 und 4. zeigt,



geht das Resultat der einen durch Vertauschung des l_1 und l_3 aus dem andern hervor.

Eine Vergleichung der Resultate zeigt, daß das absolute max M eintritt, wenn zwei nebeneinanderliegende Öffnungen belastet sind.

Anm. Die Maximalmomente werden verhältnißmäßig um so größer, je mehr die mobile Last das Eigengewicht über-

wiegt. Dies ist der Grund, warum bei großen Spannweiten die Anwendung continuirlicher Träger größere Vortheile bietet, als bei kleinen.

2.) Zwischenmomente. Die Maxima derselben können nach Gl. (12) und (13) S. 242 ermittelt werden. Gewöhnlich begnügt man sich aber damit, die absolut größten Werthe und wenige zwischentliegende Momente zu bestimmen, um auf Grund derselben eine graphische Darstellung der Maximalmomente zu zeichnen in Form von Parabelbögen (vergl. S. 25.), aus der sämtliche anderen Momente entnommen werden können.

Welcher Belastungsfall die Maximalzwischenmomente einer Öffnung bedingt, kann mit ziemlicher Sicherheit vorausgesagt werden, wenn man sich für jede Belastungsart die B.L. nach dem Gefühl aufzeichnet, und bedenkt, dass den tiefsten Einsenkungen derselben die größten Biegemomente entsprechen müssen.

So wird für l_1 das absolute $\max M_x$ entweder im Falle 2 oder 6 (Fig. 28.) eintreten müssen; die Berechnung entscheidet hierüber und liefert zugleich den Werth von $\max M_x$.

Für l_2 muß Belastungsfall 3 das Max. herbeiführen, dessen Größe wieder aus Gl. (12.) und (13) folgt. Das absolut größte Zwischenmoment und die entsprechende Belastungsweise läßt sich dann einfach durch Vergleichung der verschiedenen Maxima ermitteln.

Für andere Querschnitte wären die größten Momente unter Einführung von $\max M_2$ und $\max M_3$ für die

oben bezeichneten Belastungsfälle nach Gl. 11, S. 241 zu berechnen.

3.) Verticale Schubkräfte. Man pflegt auch hier nur die \max V über den Stützen und an einem oder zwei Zwischenpunkten zu berechnen, um danach eine graphische Darstellung aufzuzeichnen, was hier um so weniger bedenklich ist, als die begrenzenden Curven sehr flach verlaufen.

Da die Anordnung und Stärke der Füllungstheile wesentlich davon abhängt, ob eine Beanspruchung auf Zug oder Druck oder beides erfolgen kann, so muß untersucht werden, welche Belastungsfälle den größt möglichen und den kleinst möglichen Werth der V bedingen, und ist für diese $\max V$, bezw. $\min V$ zu berechnen.

Die größten V ergeben sich stets unmittelbar an den Stützen. Für diese erhält man nach Gl. (14) und (16) S. 242-243

$$\begin{aligned} \text{in } l_1 \quad V'_1 &= \frac{M_2}{l_1} + \frac{q_1 l_1}{2} \\ V''_1 &= \frac{M_2}{l_1} - \frac{q_1 l_1}{2} \\ \text{in } l_2 \quad V'_2 &= \frac{M_3 - M_2}{l_2} + \frac{q_2 l_2}{2} \end{aligned}$$

Die weiteren V an den Stützen symmetrisch zu den bisherigen sind diesen gleich, aber von entgegengesetztem Vorzeichen.

Die absolut größten kleinsten Werthe derselben erhält man an den Endauflagern bei den Belastungsfällen, welche die größten kleinsten Einsenkungen des nächstgelegenen Feldes bewirken, also

$$\begin{aligned} \max V'_1 \text{ in Fall } 6 \\ \min V'_1 \quad \quad \quad 3 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{Fig. 28.} \quad \text{über den Mittelstützen}$$

dann, wenn die Felder zu beiden Seiten gleichzeitig möglichst

große kleine Einsenkungen erfahren, also

$$\begin{aligned} \max V''_1 \text{ in Fall } 5 \quad \max V'_2 \text{ in Fall } 5 \\ \min V''_1 \quad \quad \quad 4 \quad \min V'_2 \quad \quad \quad 4 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{Fig. 28.}$$

In Zweifelsfällen entscheidet die vergleichende Berechnung.

In den Zwischenpunkten treten $\max V_x$ je unter derjenigen Belastung ein, welche das V am nächstliegenden Stützpunkte links zum $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{Maximum} \\ \text{Minimum} \end{smallmatrix} \right\}$ macht und berechnet sich

$$V_x = V_r' - q_r x$$

4.) Die größten Auflagerreactionen sind bedingt durch dieselben Belastungsfälle, wie die größten V und berechnen sich sehr einfach nach Gl. (17) S. 243.

Hiermit ist die Berechnung des Trägers soweit sie von der Constructionsform unabhängig ist, beendet.

Anmerk. Für eine größere Anzahl von Feldern würde dies Verfahren, wie leicht zu erkennen, sehr complicirt werden.

B.

Graphische Berechnung.

§. 18.

Einleitung.

Ist ein Feld eines continuirlichen Trägers belastet, so kann dasselbe als eingespannter Träger betrachtet werden, wobei die passiven Kräfte der Einspannung ersetzt sind durch die Auflagerdrücke der sämtlichen Stützen. Durch diese Auflagerdrücke entstehen an den Enden des betreffenden Feldes negative Auflagermomente, während die Belastung bei frei aufliegendem Träger Auflagermomente = 0 und positive Zwischenmomente (Kap. V.) liefern würde. Man erhält somit eine nega-

tive und eine positive Biegemomentenfläche in demselben Feld und die Biegemomente ergeben sich durch algebraische Summierung der zwei zusammengehörigen Ordinaten.

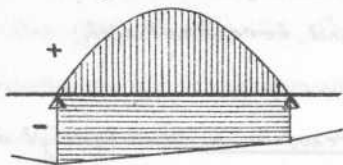
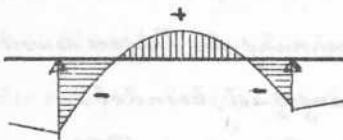


Fig. 29. Belastetes Feld.



Bei der graphischen Methode sucht man nun zuerst jene negativen Auflagermomente zu construiren, während die positive Momentenfläche bereits aus der Belastung bekannt ist. (Kap. V.)

Nach §. 3 ist die E.L. eine Seilcurve, welche durch Belastung mit der Momentenfläche und dem Horizontalzug OB entsteht; man könnte also, wenn diese Fläche gegeben wäre, die E.L. construiren; in dem Folgenden soll nun zunächst gezeigt werden, wie man ein Seilpolygon zeichnen kann, welches die Tangenten der B.L. über den Auflagern enthält und welches genügt, um die Auflagermomente zu construiren.

§. 19.

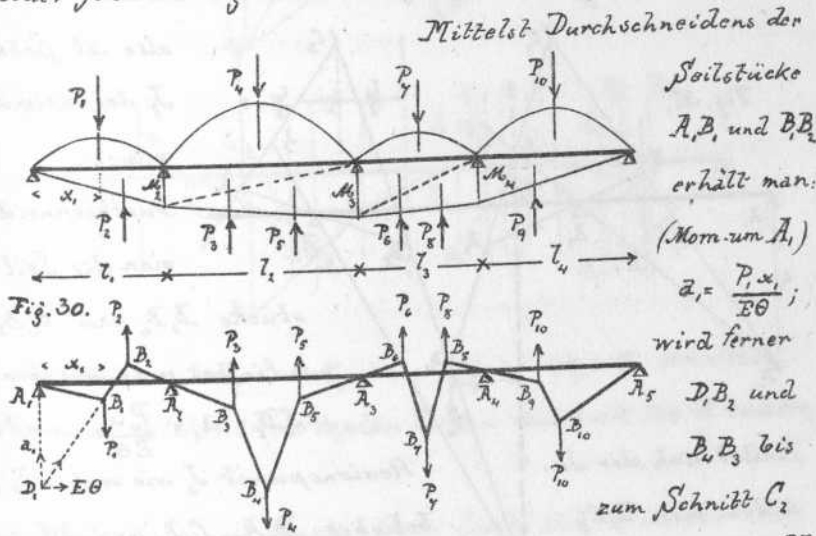
Construction der Auflagertangenten der B.L. Linie.

Es lässt sich mit Hilfe eines Kräfteplans leicht nachweisen, dass die Endlinien eines Seilpolygons unabhängig sind von der Eintheilung der erzeugenden Belastungsfläche und man kann deshalb die Momentenflächen theils ganz ungetheilt lassen, theils in Dreiecke zerlegen, um das die Auflagertangenten der B.L. enthaltende Seilpolygon zu zeichnen (s. Fig. 30.)

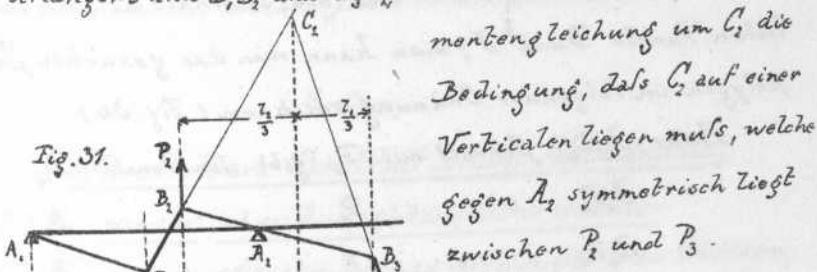
Als Beispiel soll ein continuirlicher Träger von vier Feldern gewählt werden, nach welchem jedes beliebige andere Beispiel

behandelt werden kann.

Sind sämtliche Felder belastet, so ist in der Figur bekannt die Lage von $P_1, P_2, P_3 \dots P_{10}$, welche durch die Schwerpunkte der Momentenflächen gehen, und die Größe von P_1, P_4, P_7, P_{10} ; die negativen Lasten $P_2 \dots$ theilen die Felder je in drei gleiche Theile.



verlängert und B_1B_2 und B_3B_4 durchschnitten, so gibt die Mo-

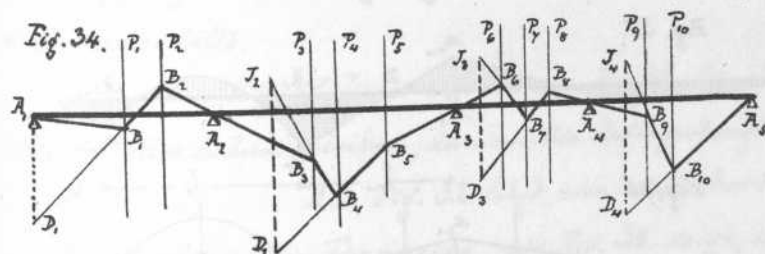
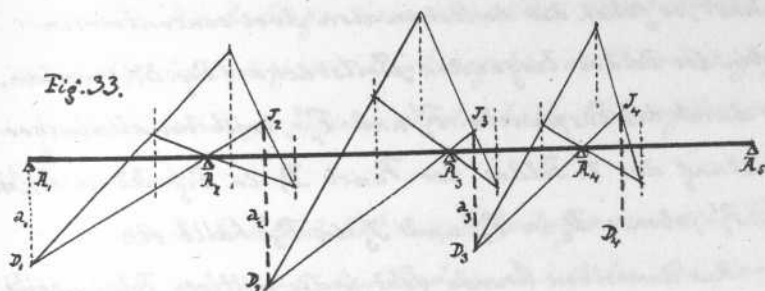


mentengleichung um C_2 die Bedingung, dass C_2 auf einer Verticalen liegen muß, welche gegen A_2 symmetrisch liegt zwischen P_2 und P_3 .

Weiter läßt sich beweisen, daß bei gleichbleibender Be-

lastung des 1. Feldes, d. h. bei constantem \bar{a}_1 , die Gerade C_2B_3 durch einen festen Punkt J_2 gehen muß, was auch D_1B_1 für eine Richtung haben mag, weil die zwei andern Seiten des $\Delta B_1B_3C_2$ ebenfalls durch feste Punkte D_1 und A_2 ge-

und daraus die negativen Auflagermomente



$M_1 = 0$ M_2 M_3 M_4 $M_5 = 0$ ermitteln.

Aus einem solchen Kräfteplan lassen sich auch die a construiren.

Bem. Die ganze Construction ließe sich etwa zur Control auch von der andern Seite herein ausführen.

§. 20.

Unmittelbare Construction der Auflagermomente ohne Auflagerabganten d. B.L.

Construirt man die sämtlichen Auflagermomente für den Fall, daß nur je ein Feld belastet ist und addirt die verschiedenen in einem Stützpunkt sich ergebenden Werthe, so erhält man dasselbe Resultat, wie wenn man sofort alle Felder belastet.

Ist nur ein Feld $A_r A_{r+1}$ belastet, so hat man in demselben wieder eine negative und eine positive Momenten=

fläche und denkt man sich wie oben das Seilpolygon gezeichnet, so gehen die zwischen den drei concentrirten Lasten des Feldes liegenden Seilstücke (Fig. 34.) verlängert durch die Fixpunkte F_r' und F_r'' , weil bei alleiniger Belastung des r . Feldes der Punkt D , in Fig. 32. in A , also J_2 in F_2' , ebenso D_2 in F_2' und J_3 in F_3' fällt etc.

Aus demselben Grunde geht je die mittlere Polygonseite

Fig. 35.

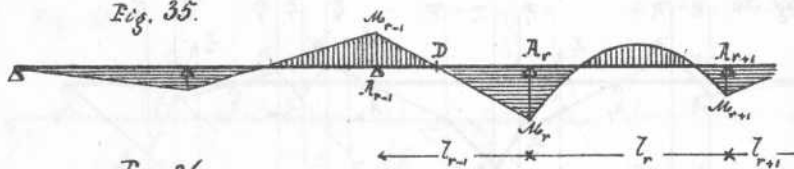


Fig. 36.

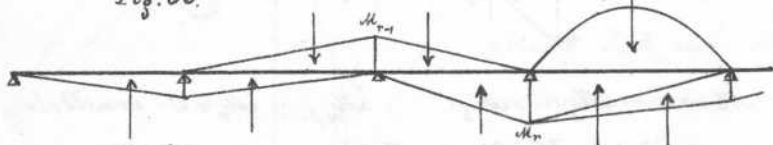
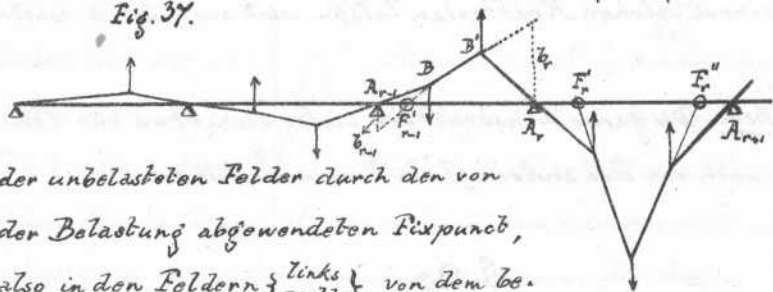


Fig. 37.



der unbelasteten Felder durch den von der Belastung abgewandeten Fixpunkt, also in den Feldern $\left\{ \begin{matrix} \text{links} \\ \text{rechts} \end{matrix} \right\}$ von dem be-

lasteten Feld durch den $\left\{ \begin{matrix} \text{linksseitigen} \\ \text{rechtsseitigen} \end{matrix} \right\}$. Durchschneidet man in Fig. 37. die Seiten BB' und BA_{r-1} resp. BA_r eines unbelasteten Feldes A_{r-1}, A_r , so ergeben die Momentengleichungen um A_{r-1} resp A_r , dass

$$A_r F' : A_{r-1} F' = b_r : b_{r-1} = M_r : M_{r-1} = A_r D \text{ (Fig. 35)} : A_{r-1} D,$$

d.h. dass D mit F_{r-1}' zusammen fällt.

Bem. 1.) Die Fixpunkte liegen nach Fig. 32. immer in den äußeren Dritteln der Felder, die mittlere Polygonseite der unbelasteten Felder aber im mittleren Drittel, also liegt diese

ganz auf einer Seite der Trägerachse.

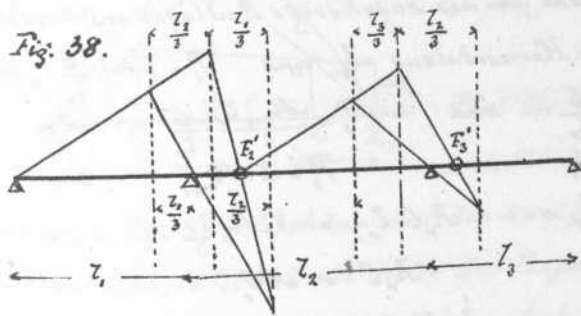
2.) Die Auflagermomente in den unbelasteten Feldern sind abwechselnd positiv und negativ und werden gegen das Trägerende hin je kleiner als das halbe vorhergehende Auflagermoment.

3.) Im Endfeld hat das Seilpolygon nur eine Ecke; die eine Seite geht durch den Endpunkt, mit dem der eine Fixpunkt zusammenfällt.

4.) Aus Fig. 37 kann man wie aus Fig. 34. die allgemeine Form der B. Lin. ableiten, da man die Auflager tangen hat.

Aus Fig. 32. folgt eine einfachere Construction der Fixpunkte, wie Fig. 38. zeigt, indem man von unbelasteten Feldern, also $a_1 = a_2 = \dots = 0$ aus-

Fig. 38.



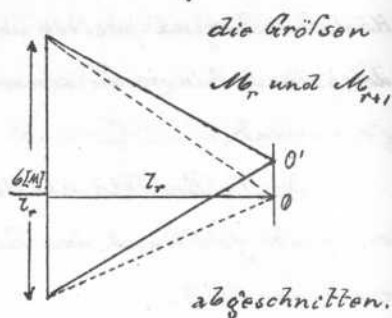
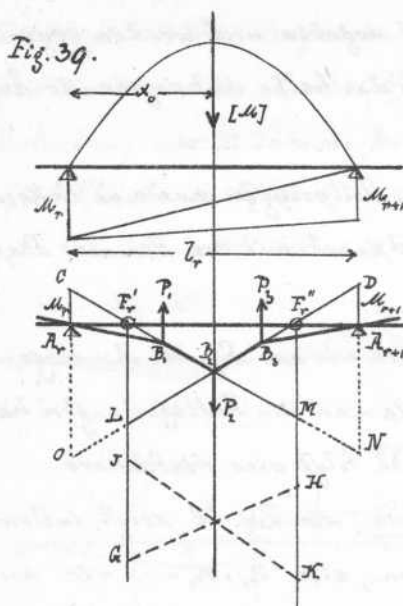
her.

geht. Ebenso wie die F' finden sich die F'' bei der Construction vom rechtsseitigen Trägerende her.

Die Construction der Auflagermomente M_r und M_{r+1} des belasteten Feldes l_r ist nun folgende:

Ist $[M]$ der Inhalt der positiven Momentenfläche, so zeichne einen beliebigen Kräfteplan mit der Kräfteverticalem $\frac{6[M]}{l_r}$ und der Polidistanz l_r , ziehe zwischen den Verticalem der Fixpunkte F'_r und F''_r durch einen belieb. Punkt der Schwerpunktsverticalem der positiven Momentenfläche die Kreuzlinien GH und JK (Fig. 39.) parallel den End-

Strahlen des Kräfteplans, mache $F_r' L = JG$, $F_r'' M = HK$, ziehe MF_r' und LF_r'' , so werden von den Auflagerverticalen



Der Beweis ergibt sich sehr einfach dadurch, daß man je die zwei Seilpolygonseiten $A_r B_1$ und $B_1 B_2$, $A_{r+1} B_3$ und $B_3 B_2$ durchschneidet

und das Moment um das zugehörige Auflager anschreibt; es ist nämlich der Horizontalzug $= l_r$ und $P_2 = [M] \cdot \frac{6}{l_r}$, also

$$P_1 = \frac{M_r l_r}{2} \cdot \frac{6}{l_r} \quad \text{und} \quad P_3 = \frac{M_{r+1} l_r}{2} \cdot \frac{6}{l_r} \quad \text{oder} \\ P_1 = 3 M_r \quad P_3 = 3 M_{r+1} \quad ; \text{ somit}$$

$$\text{Moment um } A_r : \quad A_r C \cdot l_r = 3 M_r \frac{l_r}{3} \\ A_r C = M_r$$

$$\text{Moment um } A_{r+1} : \quad A_{r+1} D \cdot l_r = 3 M_{r+1} \cdot \frac{l_r}{3} \\ A_{r+1} D = M_{r+1}$$

Aus dieser Construction geht eine zweite hervor, bei welcher die Zeichnung eines Kräfteplans und die Bestimmung der Schwerlinie der positiven Momentenfläche wegfällt.

Verlängert man in Fig. 39. CM und DL bis N und O und bestimmt im Kräfteplan einen entsprechenden Pol O' durch Parallelen zu CN und OD , so folgt aus demselben unmittelbar,

$$\text{daß} \quad CO = \frac{6[M]}{l_r} \cdot \frac{x_0}{l_r} = \frac{6 M_r}{l_r^2}$$

$DN = \frac{6[M_0]}{l_r} \cdot \frac{l_r - x_0}{l_r} = \frac{6M_{r+1}}{l_r}$, wenn M_r und M_{r+1} die statischen Momente der positiven Momentenfläche in Bez. auf A_r und A_{r+1} bedeuten. Man konstruiert deshalb in folgender Weise (Fig. 40.)

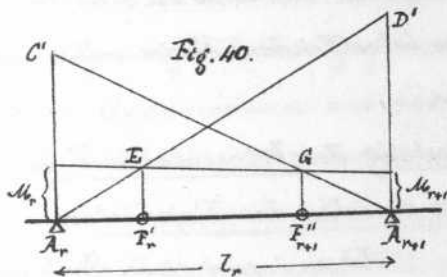
$$A_r C' = \frac{6M_r}{l_r}$$

$$A_{r+1} D' = \frac{6M_{r+1}}{l_r}$$

$A_r D', A_{r+1} C'$, Vertikalen

$E_r E$ und $F_r'' G$ und $B G$ gezogen, gibt M_r und M_{r+1} von A_r und A_{r+1} aus

Zusatz: Für gleichmäßige Vollbelastung des

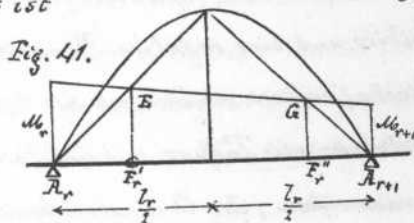


Feldes wird die positive Momentenfläche eine Parabel und es ist

$$x_0 = \frac{l_r}{2}, \text{ also}$$

$$A_r C' = A_{r+1} D' = \frac{6[M_0]x_0}{l_r^2} = \frac{3[M_0]}{l_r} = 2f, \text{ wo } f \text{ der}$$

Pfeil der Parabel; also ergibt sich für diesen Fall die Con.



struction Fig. 41. — Nachdem nun die zwei Auflagermomente bestimmt sind, läßt sich mit Hilfe der Fixpunkte die ganze Figur 35. aufzeichnen und man kann überhaupt für jede belieb. Belastung des Trägers die sämtlichen Biegemomente finden. Es wird sich jetzt also hauptsächlich darum handeln, diejenige Belastungsart zu finden, bei welcher die größten positiven und negativen Biegemomente in den verschiedenen Querschnitten eines kontinuierlichen Trägers entstehen.

§. 21.

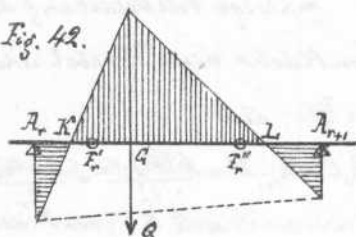
Erzeugung der Maximalbiegungsmomente.

Man hat in jedem Feld zwei Arten von Querschnitten zu unterscheiden, nämlich solche zwischen den beiden Fixpunkten und solche zwischen einem Auflager und dem benachbarten Fixpunkt und zwar ist für beide zu ermitteln der Einfluß der Belastung des betreffenden Feldes selbst und derjenigen anderer Felder.

1. Wirkung der Belastung des betrachteten Feldes.

a. in einem Querschnitt zwischen den Fixpunkten.

Fig. 42.



Ist an irgend einer Stelle des Feldes eine Einzellast Q angebracht, so entsteht nach Früherem eine positive und eine negative Momentenfläche, erstere ein Dreieck mit der Spitze in der Lastverticalen, letztere ein Trapez mit den Parallelsseiten = den negat. Auflagermomenten; die Ordinaten beider sind in Fig. 42. bereits algebraisch addirt.

Es läßt sich nun beweisen, daß bei jeder Lage der Last Q zwischen A_r und A_{r+1} , die Fixpunkte innerhalb des positiven Theils der resultierenden Momentenfläche liegen müssen; hieraus folgt, daß man bei Vollbelastung des Feldes zwischen den Fixpunkten die größten positiven Biegemomente erhält, während durch keine Belastung des Feldes selbst ein negat. Moment sich ergibt.

b. in einem Querschnitt zwischen A_r und F'_n od. F''_n und A_{r+1} .

Es sei wieder in einem Punkt G eine Einzellast Q angebracht, so erzeugt dieselbe eine combinirte Momentenfläche wie Fig. 42. und man erhält offenbar im Querschnitt K die

$\left\{ \begin{smallmatrix} \text{positiven} \\ \text{negativen} \end{smallmatrix} \right\}$ Momente durch Verschiebung der Last Q nach $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{links} \\ \text{rechts} \end{smallmatrix} \right\}$; es stellt also Q für den Querschnitt K eine Belastungsgrenze vor, d.h. man erhält in K das größte $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{posit.} \\ \text{negat.} \end{smallmatrix} \right\}$ Moment, wenn man nur $\left\{ \begin{smallmatrix} A_n Q \\ Q A_{n+1} \end{smallmatrix} \right\}$ belastet. - Für die Querschnitte L gilt das Umgekehrte.

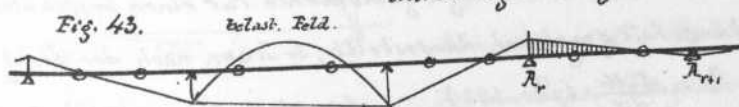
Man sollte nun eigentlich zu jedem Querschn. K eine zugehörige Belastungsgrenze Q finden, es ist aber einfacher, Q anzunehmen und hierfür den Querschnitt K nach Fig. 42. und S. 20 zu bestimmen.

2. Wirkung der Belastung der übrigen Felder.

Belastet man ein Feld, so geht die Momentenlinie in den $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{links} \\ \text{rechts} \end{smallmatrix} \right\}$ davon liegenden Feldern durch den $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{Linkseit.} \\ \text{rechtseit.} \end{smallmatrix} \right\}$ Fixpunkt (S. 254.). Dies benützt man, um die ungünstigste Belastung zu ermitteln,

a. für Querschnitte zwischen den Fixpunkten des betrachteten Feldes. Man findet mittelst Skizzen wie Fig. 43., daß

durch regelmäßigen Wechsel von



Belastung und Nichtbelastung der aufeinanderfolgenden Felder gleichartige Momente in einem unbelasteten Feld entstehen und man schließt daraus: die größten $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{pos.} \\ \text{neg.} \end{smallmatrix} \right\}$ Momente entstehen in Querschn.

Fig. 44. zwischen den Fixpunkten durch abwechselnde Vollbelastung der Felder, wo.

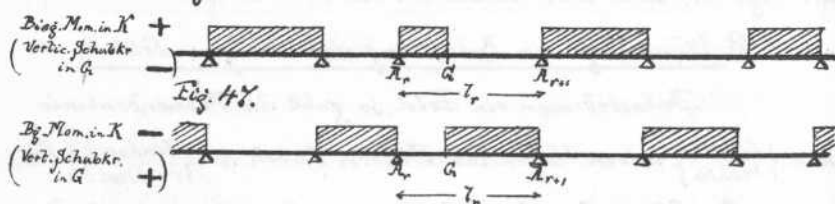
Fig. 45. bei der das betrachtete Feld

$\left\{ \begin{smallmatrix} \text{belastet} \\ \text{nicht bel.} \end{smallmatrix} \right\}$ wird $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{Fig. 44} \\ \text{Fig. 45} \end{smallmatrix} \right\}$.

b. für Querschn. zwischen A_r und F_r' oder A_{r+1} und F_r'' .

Ist nach 1,6 G die Belastungsgrenze für einen Querschnitt K , so wird G ganz ebenso behandelt wie die Auflagerepunkte in 2.^a und man hat den Satz: die größten $\left. \begin{matrix} \text{pos.} \\ \text{neg.} \end{matrix} \right\}$ Momente in K entstehen durch Vollbelastung von $\left\{ \begin{matrix} A_r G \\ G A_{r+1} \end{matrix} \right\}$ und den abwechselnden Feldern, indem man die beiden Theile von $A_r A_{r+1}$ als vollständige Felder behandelt {Fig. 46}. Für die Querschnitte L gilt das Umgekehrte.

Fig. 46.



§. 22.

Graph. Berechnung der verticalen Schubkräfte.

(Transversalkräfte).

Sind die Biegemomente für einen bestimmten Belastungsfall graphisch dargestellt, so kann nach der Gleichung

$$V = \frac{dM}{dx} \quad (\text{St. 194}) \quad \text{die einem Querschnitt } x$$

zugehörige Größe von V auf einer Verticalen mit bestimmter

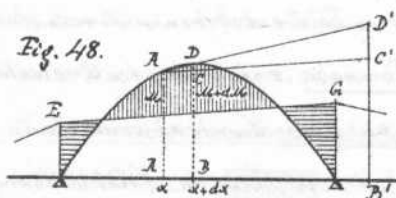


Fig. 48.

Entfernung AB' vom Querschn. abgegriffen werden, denn es

$$\text{ist } \frac{dM}{dx} = \frac{CD}{AB} = \frac{C'D'}{AB'} \quad \text{wenn } AC' \parallel EG$$

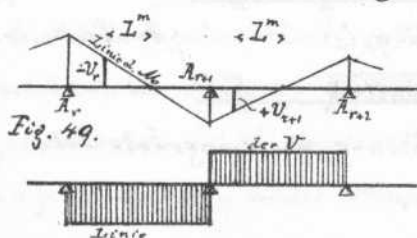


Fig. 49.

Hierbei empfiehlt es sich, die Entfernung AB' so zu wählen, dass V in einem bequemen Maßstab abgegriffen wird.

War z. B. der Maßstab für die Biegemomente M $1\text{ mm} = L^m$, so mache nach dem Längensmaßstab $AB' = L^m$, so ist V abzugreifen im Maßstab $1\text{ mm} = \frac{L^m}{L^m} = 1^l$.

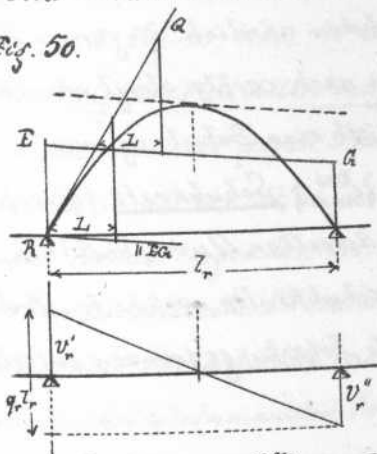
Bezüglich des Vorzeichens ist zu bemerken, daß V $\left. \begin{smallmatrix} \text{positiv} \\ \text{negativ} \end{smallmatrix} \right\}$ wenn M algebraisch $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{wächst} \\ \text{abnimmt} \end{smallmatrix} \right\}$.

Specielle Fälle.

1.) Ist die Biegemomentenfläche durch eine genügend gerade Linie begrenzt, so ist V constant und in L^m Entfernung vom O Punkte abzugreifen.

2.) Der gleichmäßigen Belastung der Felder entspricht eine gerade Linie der V , welche die Trägerlinie EA schneidet, wo eine Parallele zu EG die Parabel berührt. Die größten

Fig. 50.



Ordinaten dieser Geraden liegen über, bzw. unter den Auflagern. Die Größe derselben wird erhalten, wenn man die Abweichung der Richtung EG von einer Tangente RA an die Parabel im Auflagerpunkte auf einer Vertikalen

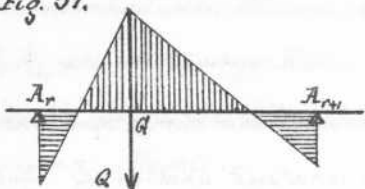
in der Entfernung L^m von dem Schnittpunkt beider Linien oder deren Parallelen mißt. — Diese Construction muß für beide Auflager ausgeführt werden, oder man hat entsprechend der Gleichg: $V_r' - V_r'' = q_r L_r$ $q_r L_r$ abzutragen wie Fig. 50 zeigt, um V_r'' zu erhalten.

(q_r bedeutet die Belastung pro Längeneinheit).

§. 23.

Erzeugung der größten vertic. Schubkräfte.

Wirkt eine Einzellast Q rechts von einem Quer-
schnitt G des n . Feldes, so erhält man die Momente nach
Fig. 51, also geht nach §. 22 die verticale Schubkraft in G
Fig. 51.



von $+$ in $-$ über; rückt die
Last Q nach $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{rechts} \\ \text{links} \end{smallmatrix} \right\}$, so ergibt
sich in G eine $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{pos.} \\ \text{neg.} \end{smallmatrix} \right\}$ Schubkraft,
somit erhält man das Maximum
der $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{pos.} \\ \text{neg.} \end{smallmatrix} \right\}$ Schubkraft in G , wenn man $\left\{ \begin{smallmatrix} A_n A_{n+1} \\ A_n G \end{smallmatrix} \right\}$ vollbelastet.

Einfluss der Belastung anderer Felder.

Man kann aus Skizzen wie Fig. 43. beurtheilen, durch
welche Belastungen in einem unbelasteten Feld pos. oder neg.
Schubkräfte entstehen, je nachdem nämlich die gerade Mom.
Linie in diesem Feld von links nach rechts steigt oder fällt;
man schließt hieraus, dass durch eine Belastung wie
Fig. 44 in G das Max. der $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{pos.} \\ \text{neg.} \end{smallmatrix} \right\}$ Schubkraft entsteht
und man wählt am einfachsten dieselben Querschnitte G
zur Bestimmung der Maximalschubkräfte, welche bei Bestim-
mung der Maximalmomente als Belastungsgrenzen aufgetre-
ten sind.

§. 24.

Verlauf der graph. Berechnung des contin. Trägers.

Die gleichmäßig vertheilten Belastungen seien in
In. p. U. m: Permanente Belastg. (Eigengew.) = p .
Mobile Belastung (Verkehrslast) = K ,
so macht man die graphischen Darstellungen der Maxml.

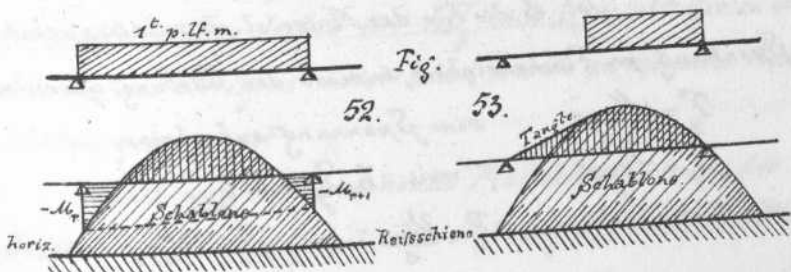
Biegemomente und Max. Schubkräfte für die Belastung 1^{te} p. l. f. m., multiplicirt die vom Eigengewicht hervorgebrachten Größen mit p , die von der Verkehrsbelastg mit k und addirt schließlich beide, um sie graph. zus. zustellen.

Der Gang der Berechnung ist nun folgender:

1.) Aufsuchung der Fixpunkte F' und F'' für jede Öffnung nach Fig. 38.; bei symmetr. Träger sind nur die F' oder die F'' zu bestimmen und die andern aus der Symmetrie abzuleiten.

2.) Feststellung der die Maximalmomente erzeugenden Belastungen nach §. 22. (Fig. 44-47) und der zu den Belastungsgrenzen G gehörigen Querschnitte K und L (Fig. 42.)

3.) Construction der sämtlichen Auflagermomente etwa nach Fig. 40, bzw. 41 und 43 für jede aus 2.) gefundene Belastungsart (am besten in getrennten Figuren) und der Zwischenmomente durch Hinzufügung der posit. Momente Flächen. — Hierzu ist zu bemerken, daß es von Vortheil ist, für einen frei aufliegenden bel. langen Träger mit der Belastung 1 die parabolische Momentenlinie zu construiren und hier nach eine Parabelschablone anzufertigen, welche immer mit vertic. Achse etwa an der Reisschiene hin und her geschoben wird, um für einen gewissen Belastungsfall die positive Momentenfläche für jedes beliebig lange Feld zu erhalten.



Beispiele zeigen die Fig 52 und 53.

4.) Feststellung der die Maximalschubkräfte erzeugenden Belastungen nach §. 23. - Hier ist zu beachten, dass man, um das Maximum der pos. und neg. Schubkräfte in einem Stützpunkt A_n zu erhalten, den Punkt G (Fig. 46-47) nach A_n verschieben muß; man hat also um das $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{pos.} \\ \text{neg.} \end{smallmatrix} \right\}$ Maximum unmittelbar rechts vom Auflager A_n zu bekommen, die zwei an A_n stossenden Felder $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{belastet} \\ \text{unbelastet} \end{smallmatrix} \right\}$, die übrigen abwechselnd belastet und unbelastet anzunehmen. Für V unmittelbar links von A_n umgekehrt.

5.) Construction der verticalen Schubkräfte in den Stützpunkten und einigen Zwischenpunkten G nach §. 22.

Anmerkung. Sind die Belastungen der einzelnen Felder pro lfd. m. verschieden groß gegeben, so sind die durch Belastung eines Feldes entstandenen Momente und Schubkräfte mit dem entsprech. p , resp. k zu multipliciren, oder die Momentenflächen etc. sofort mit der richtigen Belastung statt mit 1 zu zeichnen, wobei die Anwendung obiger Schablone nicht mehr möglich ist.

§. 25.

Bestimmung der Querschnittsflächen eines continuirlichen Fachwerks.

Ist δ die für das Material als zulässig erkannte Spannung pro Flächeneinheit, so muß der Gurtnungsquerschn.

$$\begin{aligned} F_g &= \frac{M_{\max}}{h \cdot \delta} && \text{eine Spannung aufnehmen} \\ S_g &= \frac{M_{\max}}{h} && \text{weil } h S_g = M_{\max} \\ \text{der Verticalständer} \quad F_v &= \frac{V_{\max}}{\delta} && : \quad S_v = V_{\max} \end{aligned}$$

der Diagonalen $F_d = \frac{V_{\max}}{s \cdot \sin \alpha}$ $S_d' = \frac{V_{\max}}{\sin \alpha}$, wo
 α der Neigungswinkel der Streben gegen den Horizont.

Sonach muß die graphische Darstellung der Werthe
 hS_g , $S_v' = \sin \alpha S_d'$ durch Linien begrenzt sein, welche die
 der M_{\max} und V_{\max} oder V_{\min} äußerlich berühren oder außer-
 halb der letzteren liegen.

Da man die Querschnitte nicht stetig ändern kann,

Fig. 54.

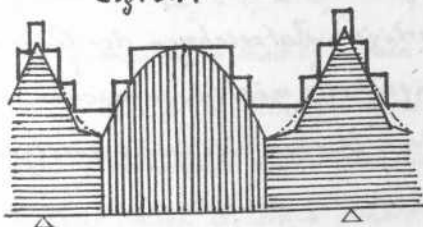
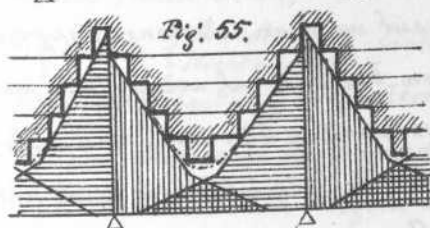


Fig. 55.



so wird auch die Begren-
 zungslinie der hS_g und
 S_v' eine staffelförmige
 sein müssen. Bei der
 Feststellung derselben ist
 zu beachten, daß die ge-
 naue Berechnung der
 absoluten M_{\max} und V_{\max}
 welche auch partielle Be-

lastungen einzelner Öffnungen in Rücksicht zieht, statt
 der gebrochenen Linien Hyperbelzweige ergibt, welche in
 den höchst gelagerten Punkten mit den erhaltenen gebroche-
 nen geraden Linien zusammenfallen, an den einspringen-
 den Winkeln dagegen nach außen hin abweichen. Man darf
 daher, wenn man nur vollständige Belastung der einzelnen
 Felder berücksichtigt hat, an diesen Stellen des Trägers
 die staffelförmige Linie der hS_g und S_v' nicht gar zu sehr
 nähern, was übrigens meist schon durch practische Rück-
 sichten geboten ist.

Wählt man entsprechende Maßstäbe, so kann die
 Staffelform sofort eine graph. Darstellung der Querschnitte

selbst geben und wird dann zweckmäßig so verfahren, daß man zunächst einen Minimalquerschnitt feststellt, die dessen zulässiger Spannung entsprechende Horizontale durch die graph. Darstellung der M_{\max} legt, die jedesmalige Verstärkung (durch ein Blech bei den Gurtungen) ebenfalls durch weitere Horizontale andeutet, und alsdann die Strecken, für welche der Minimalquerschnitt genügt, oder auf welche eine Verstärkung um 1, 2, 3, ... Bleche nöthig wird, bestimmt. — Um ein derartiges Aufzeichnen der Querschn. staffel auch für die Füllungstheile möglich zu machen, wird man die Flächen der negativen V ebenfalls in die positive Richtung übertragen.

Für die Strecken, auf welchen alsdann doppelte Schraffirung die V -flächen bedeckt, auf welcher also positive und negative V erzeugt werden können, sind z. B. im Mohr'schen System (Kap. II.) druckfähige Querschnitte der Diagonalen oder Gegenstreben notwendig.

Wie die zweierlei Flächen der V , so kann man im allgemeinen auch die der M aufeinanderklappen (s. Fig. 54), da man gewöhnlich den Gurtungen einen zug- und druckfähigen Querschnitt gibt, so daß ein $\left. \begin{smallmatrix} \text{pos.} \\ \text{neg.} \end{smallmatrix} \right\}$ Moment, das absolut kleiner ist als das $\left. \begin{smallmatrix} \text{neg.} \\ \text{pos.} \end{smallmatrix} \right\}$ deselben Querschnitts, keinen Einfluss auf die Dimensionen hat. (Anders ist es jedoch, wenn man, wie es bei Anwendung der Launhardt'schen Formel geschieht, die zulässige Inanspruchnahme von dem Verhältnis der zwei vorkommenden Grenzspannungen abhängig macht).

§. 26.

Bestimmung der Auflagerdrücke.

Nachdem der ganze Träger berechnet ist, ist es wegen der Berechnung der Auflager und der Pfeiler noch nothwendig, die Grenzen der Auflagerdrücke zu bestimmen, welche unter Umständen auch negativ (Zug) werden können. Es ist nach §. 243.

$$Q_r = V_r' - V_{r-1}'', \text{ also}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \max Q_r = \max V_r' - \min V_r'' \\ \min Q_r = \min V_r' - \max V_r'' \end{array} \right. \quad (1.)$$

$$(2.)$$

NB. Subtrahend und Minuend treten in der That gleichzeitig auf; nach §. 24, 4 erhält man nämlich die Werthe $\left\{ \begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array} \right\}$ durch $\left\{ \begin{array}{l} \text{Belastung} \\ \text{Nichtbelastung} \end{array} \right\}$ links und rechts von R_r und abwechselnde Belastung der andern Felder. Zu demselben Resultat führt auch schon das mechanische Gefühl.

Man erhält nach Obigem die Grenzwerte der Auflagerdrücke sehr einfach durch Addiren der absoluten Grenzwerte von V_{\max}' , resp. V_{\min}'' aus der graph. Darstellung der V .

§. 27.

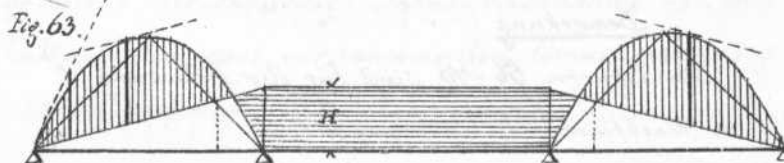
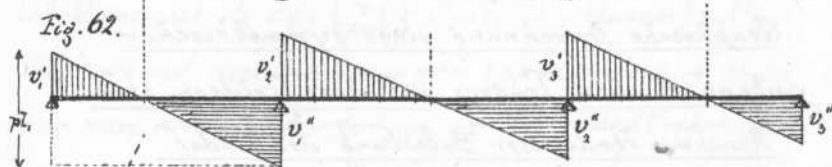
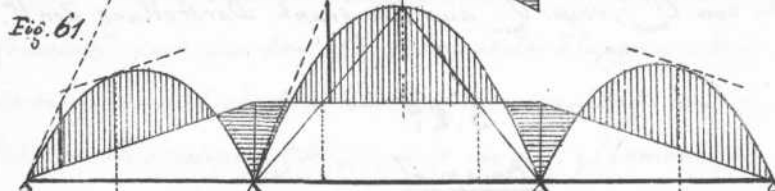
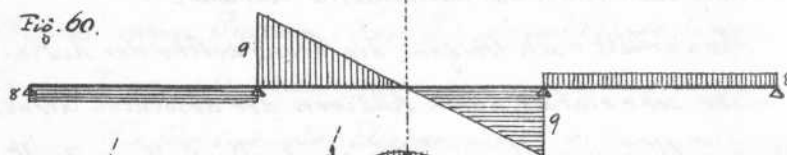
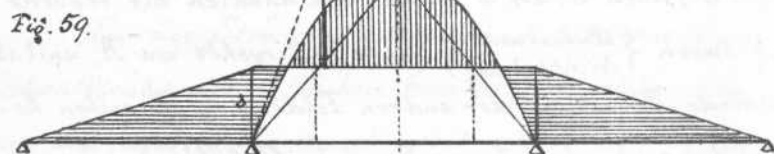
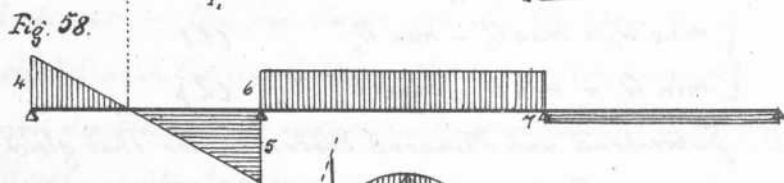
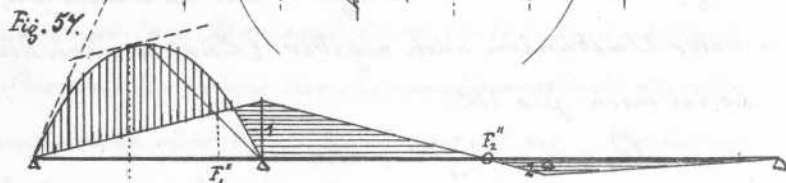
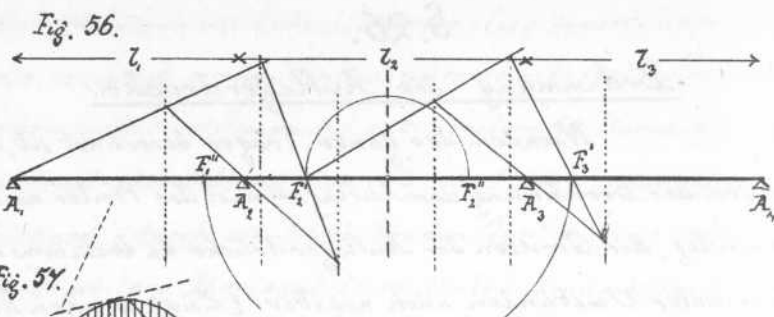
Beispiel.

Graphische Berechnung eines symmetrischen
continuirlichen Trägers mit drei Feldern ohne

Annahme theilweiser Belastung der Felder.

Bemerkung:

Die Figuren 56-70 sind für die Belastung 1^t pro Lfd. m. construirt.



1.) Bestimmung der Fixpunkte . Fig. 56.

F'_1 und F'_3 sind nach dem auf St. 255 angegebenen Verfahren ermittelt; F''_1 und F''_3 ergeben sich aus der Symmetrie gegen die Trägermitte.

2.) Berechnung des Einflusses der Belastung jedes einzelnen Feldes auf die Größe von M und V .

Fig. $\left. \begin{matrix} 57 \text{ und } 58 \\ 59 \text{ und } 60 \end{matrix} \right\}$ zeigen den Einfluss der Belastung des $\left. \begin{matrix} \text{ersten} \\ \text{zweiten} \end{matrix} \right\}$ Feldes allein.

Eine Drehung der Figur 57. um eine verticale Achse in der Trägermitte um 180° gibt die graphische Darstellung der M bei alleiniger Belastung der dritten Öffnung; eine gleichzeitige Drehung der Fig. 58. um die verticale und die horizontale Achse die graphische Darstellung der V für diese Belastungsweise.

3.) Graphische Darstellung der M und V des Trägers erzeugt durch die Eigenlast (Fig. 61 und 62.)

Die Auflagermomente werden erhalten durch Addition der Ordinaten aus Fig. 57, deren Umkehrung und Fig. 59 und Multiplikation mit p , nämlich

$$M_1 = M_4 = 0$$

$$M_2 = M_3 = p \{ (-1) + (-3) + 2 \}$$

[NB. Die Ziffern sind nur Numerierung, nicht Zahlengrößen].

Die verticalen Schubkräfte bei den Auflagern

sind $V'_1 = -V'_3 = p \{ 4 + (-8) + 4 \}$

$$V''_1 = -V''_3 = V'_1 - p l,$$

$$V'_2 = -V'_4 = p \{ 6 + 9 - 6 \} = p \{ 9 \}$$

4.) Die Belastungsarten, welche die größtmöglichen Auf-

lager- und Zwischenmomente erzeugen, sind (§. 21.) :

- a.) innerhalb des 1. Feldes die Belastung des 1. und 3. Feldes (od. unter Umständen bei negat. M_{\max} Belastg. des 2. Feldes).
- b.) über dem Auflager A_2 die Belastg. des 1. und 2. Feldes.
- c.) innerhalb des 2. Feldes die Belastg. des 2. Feldes als M_{\max} (oder für $-M_{\max}$ Belastung des 1. und 3. Feldes)

NB. Die in Klammer beigesetzten Fälle treten ein, wenn das 1. u. 3. Feld gegenüber dem 2., resp. das 2. gegenüber dem 1. und 3. Feld sehr klein.

Eine weitergehende Untersuchung ist unnötig, da die graph. Darstellung der M_{\max} der 2. Trägerhälfte symmetr. der der ersten ist.

5.) Graph. Darstellung der M_{\max} des ganzen Trägers, erzeugt durch die mobile Last allein (Fig. 63-65.) Aus Fig. 63. erhält man nach 4.) M_{\max} innerhalb des 1. und 3. Feldes. Die Figur ist bestimmt durch $H = \{-1\} + 2$; die Ordinaten sind natürlich noch mit K zu multipliciren.

Aus Fig. 64. $\max M_2 = \{-1\} + (-3) \cdot K$

aus Fig. 59. $\max M$ innerhalb des 2. Feldes.

Die in diesen Figuren dargestellten Belastungsfälle sind in Fig. 65. mit leichten Linien so übereinander skizzirt, daß die positiven Flächen oben, die negativen unten liegen. Die stärker ausgezogene gebrochene Linie der negativen Richtg. ist heraufgeklappt und dadurch die absolute Grenzlinie der Mom. Fläche bestimmt.

6.) Die Belastungsfälle, welche die algebr. größten und kleinsten V von der mobilen Last bedingen, sind (§. 24, 4)

für $V'_{\max} = -V''_{\min}$ Belastg. des 1. und 3. Feldes.

$V'_{\min} = -V''_{\max}$ " " 2. "

$V''_{\max} = -V'_{\min}$ " " 3. "

$V'_{\min} = -V''_{\max}$ " " 1. und 2. "

$V'_2 \max = -V''_2 \min$ " " 1. und 2. "

$V'_2 \min = -V''_2 \max$ " " 3. "

Fig. 64.

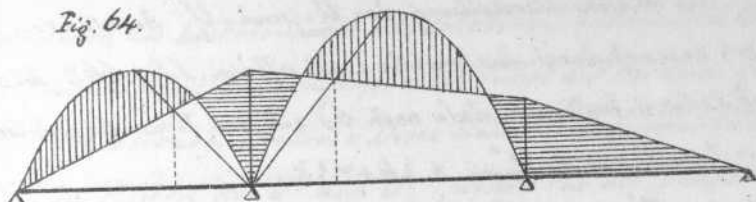


Fig. 65.

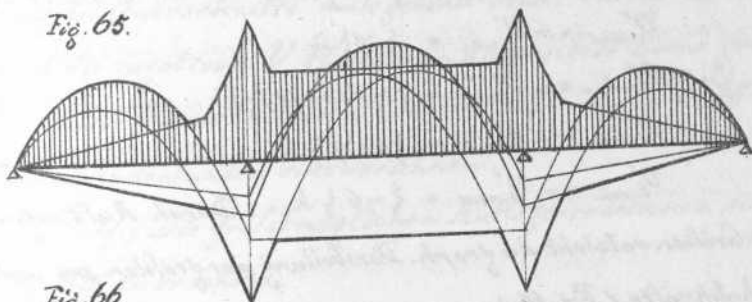


Fig. 66.

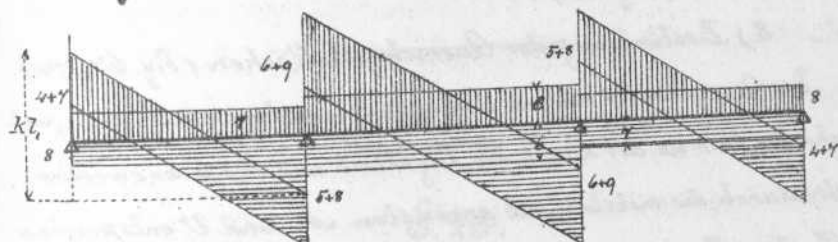


Fig. 67.

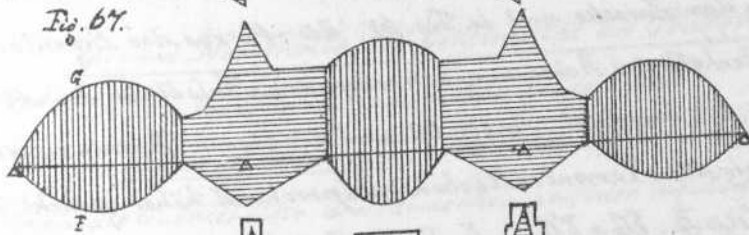


Fig. 68.

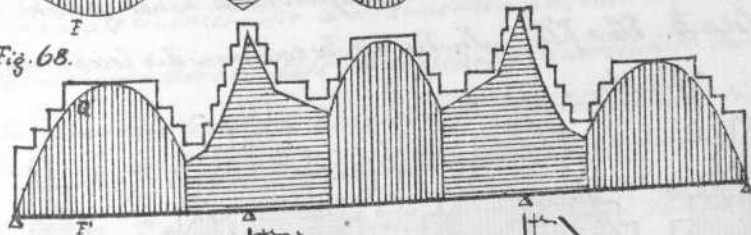
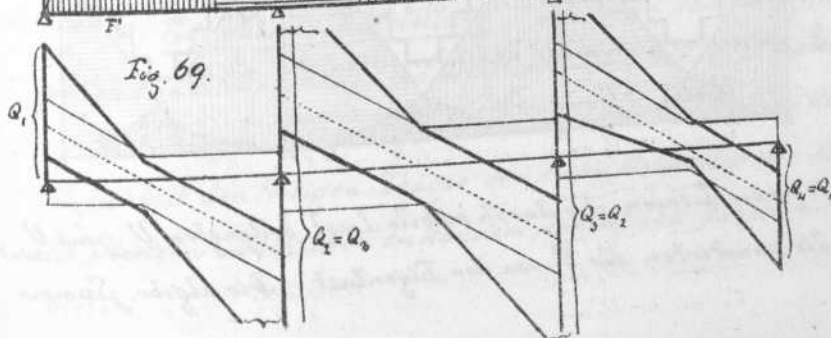


Fig. 69.



4.) Graph. Darstellung der V_{\max} und V_{\min} des ganzen Trägers erzeugt durch die mobile Last allein. (Fig. 66.) Dasselbe ist dadurch bestimmt, daß nach 6.) aus der Figur 58 und 60

$$V'_{\max} = -V''_{\min} = \{4+4\}k$$

$$V'_{\min} = -V''_{\max} = \{-8\}k$$

$$V''_{\max} = -V'_{\min} = \{4\}k$$

$$V''_{\min} = -V'_{\max} = \{-5+(-8)\}k$$

$$V'_2 \max = -V''_2 \min = \{6+9\}k$$

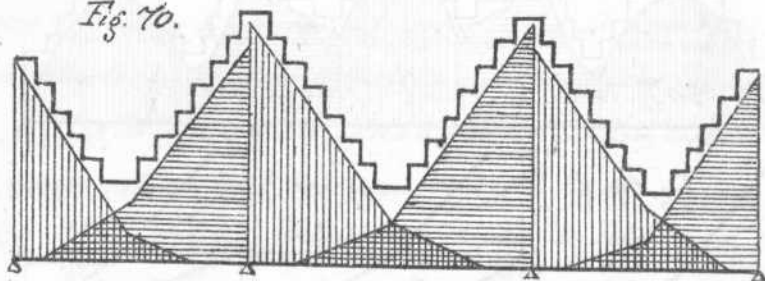
$$V'_2 \min = -V''_2 \max = \{-6\}k \quad \text{Durch Auftragen die.}$$

ser Größen entsteht die graph. Darstellung der größten pos. und neg. Schubkräfte (Fig. 66.).

8.) Bestimmung der Querschnittsflächen (Fig. 67-70.)

Die Querschnitte müssen Spannungen aufnehmen können, welche der Summe der durch die Eigenlast und der Grenzwerte der durch die mobile Last erzeugten M und V entsprechen. Zu dem Zwecke sind in Fig. 67. die M aus der Eigenlast unterhalb der Achse in entsprechendem Maßstabe den M der Fig. 66. beigelegt. In Fig. 68. sind die oberen Begrenzungslinien der Momentenflächen entsprechend höher gerückt, so daß z.B. $FG = F'A'$. In Fig. 69. bezeichnen die leicht ausge-

Fig. 70.



zogenen Linien, die durch mobile Last bedingten V_{\max} und V_{\min} , die punctirten die V von der Eigenlast. Die algebr. Summe

der durch die ersteren und die letzteren bestimmten Ordinaten des gleichen Trägerpunktes führt auf die stark gezogenen gebrochenen Linien. Diese sind die Begrenzungslinien für die Flächen der V_{\max} und V_{\min} , welche für die Dimensionierung der Querschnitte maßgebend sind. In Fig. 70 endlich sind die negativen V Flächen in die positive Ebene geklappt.

Die Querschnittsstaffeln sind nach den in §. 25 gegebenen Andeutungen einzuzuzeichnen.

9.) Die größtmöglichen Auflagerreactionen sind aus Fig. 69. zu ersehen.

Anhang.

§. 28.

Vor- und Nachteile der Continuität der Träger.

Die Vortheile continuirlicher Träger sind:

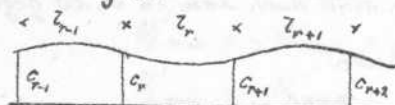
1.) Materialersparnis. Passt man bei gleichen Stützhöhen die Querschnitte den Momenten an, oder regulirt die Stützhöhen derart, daß ein constanter Querschnitt durchge-
führt werden kann, so kann eine Materialersparnis von 25-50% bei den Gurtungen erzielt werden.

2.) Erleichterte Aufstellung. Bei hohen Thalübergängen und in solchen Fällen, wo die Herstellung eines Gerüstes zur Montirung des Trägers große Kosten herbeiführt, kann die Möglichkeit den fertigen Träger von einem Outseiler her über die Stützen verschieben zu können, erhebliche Ersparnisse bieten.

Die Nachteile sind:

1.) Unbeabsichtigte Änderungen in der Höhenlage der Stützen führen erhebliche Änderungen in den Größen der Biegemomente herbei. Zur Berechnung der durch Senkung oder Hebung einer Mittelstütze bewirkten Zu- oder Abnahme (D) der Auflagermomente hat man Gleichgn

Fig. 41.



von der Form:

$$D_{r-1} l_{r-1} + 2D_r (l_{r-1} + l_r) + D_{r+1} l_{r+1} = 6OE \left\{ \frac{c_{r-1} - c_r}{l_{r-1}} + \frac{c_{r+1} - c_r}{l_r} \right\}$$

wo c_r die Höhe der Stützpunkte über einer Horizontalen bezeichnen.

Führt man für practisch mögliche Werthe der Hebungen und Senkungen die Rechnung aus, so ergibt sich, daß die dadurch bedingten Änderungen für Träger mit geringen Öffnungsweiten sehr beträchtlich, für solche mit grossen nur gering sind, wie folgendes Beispiel zeigt:

Continuirl. Träger von 2 Öffnungen à 7^m , mit der Höhe $h = \frac{7}{10}$.

Zul. Inanspruchn. $400 \text{ kg. p. } 1 \text{ cm.}^2$; $E = 2000000 \text{ kg. p. } 1 \text{ cm.}^2$

Hebung der Mittelstütze $d = c_1 - c_2 = c_2 - c_3$

Nach obiger Formel ist

$$2D_2 \cdot 2l = 6OE \left\{ -\frac{2d}{l} \right\} ; D_2 = \frac{3dOE}{l^2} ; \text{ nun ist}$$

aber nach Kap. I. §. 16.

$$M_0 = \frac{q}{h} \cdot 0 \quad \text{oder}$$

$$0 = \frac{h}{8} M_0 = \frac{7}{10} \cdot \frac{M_0}{400} , \text{ somit}$$

$$D_2^{mt} = -\frac{3d}{l^2} \cdot \frac{2000000}{10 \cdot 400} \cdot \frac{7}{10} M_0 , \text{ wo } M_0 \text{ der absolute}$$

$$\text{Werth; } D_2 = -\frac{3000d}{7l} \cdot M_0$$

Bei einer Hebung $d = 2 \text{ cm.}$ und einer Spann. $l = 10^m$ ist also die Zunahme von $M_{\max} = \frac{6}{7} M_{\max}$

bei einer Spannweite $l=100^m$ nur $= \frac{6}{70} M_{max}$

Diese Beobachtung zeigt, da unerhebliche Änderungen in der Höhenlage der Stützen unvermeidlich sind und bei Feststellung der Querschnitte auf solche Möglichkeit Rücksicht genommen werden muß, daß bei kleinen continuirl. Trägern (geringe Öffnungsweiten) eine Materialersparnis nicht zu erreichen ist, und werden daher in solchen Fällen contin. Träger zweckmäßig gar nicht, oder nur bei zwingenden Umständen angewandt; bei großen Spannweiten dagegen können contin. Träger mit Vortheil verwendet werden.

2.) Der Wechsel von Zug und Druck findet nicht nur auf bestimmte Längen bei den Füllungstheilen, sondern auch bei den Gurtungen statt.

Da letztere übrigens meistens ebenfalls druckfähige Querschnitte erhalten, so fällt diesen Theil weniger ins Gewicht.

§. 29.

Zweckmäßigste Längenverhältnisse der Spannweiten continuirlicher Träger.

Das zweckmäßigste Längenverhältnis ist abhängig von der Anzahl der Öffnungen und der Lastvertheilung. Das rationellste Verhältnis wäre wohl das, welches die Maximalmomente in allen Öffnungen bei den ungünstigsten Belastungsfällen gleich groß macht. Diese Bestimmung wird annähernd erfüllt, wenn man alle innern Öffnungen gleich lang, die Endöffnung $\frac{1}{6}$ bis $\frac{1}{5}$ tel

kürzer macht.

§. 30.

Vorthelle beabsichtigter Senkungen der Mittelstützen.

Eine Senkung der Zwischenstützen hat bei grossen Spannweiten, wo die günstigste Senkung genügend gross ist, um genau bewerkstelligt und jederzeit (durch Schrauben und Keile) restaurirt werden zu können, den grossen Vortheil, dass man die Quertungen ohne erheblichen Materialverlust mit gleichem Querschnitt durchführen kann und vergl. mit dem einfachen Träger sich eine bedeutende Materialersparnis ergibt.

Diesen Vortheil wird erreicht, wenn die Stützhöhen derart regulirt werden, dass

- 1.) sämtliche Auflagermomente gleich gross und
- 2.) das grösste Zwischenmoment, welches am Träger vorkommen kann, den grössten Auflagermomenten absolut gleich wird.

Zur Berechnung dieser günstigsten Senkungen hat man nach §. 28. ebenso viele Gleichungen als Zwischenstützen von der Form

$$D_l l_r + 2D_{r+1} (l_r + l_{r+1}) + D_{r+2} l_{r+1} = 6 OE \left\{ \frac{c_r - c_{r+1}}{l_r} + \frac{c_{r+1} - c_{r+2}}{l_{r+1}} \right\}$$

Beispiel.

Für einen symmetrischen Träger mit 3 Öffnungen von 50, 55, 50 m. Weite mit $p = 1,4^t$; $K = 2,1^t$ p.t.f.m. belastet, berechnet nach § 17, hat man, wenn $c_1 = c_4$

$$c_1 - c_2 = c_4 - c_3 = d \quad \text{und}$$

$$D_0 = D_4 = 0$$

$$D_2 = D_3 = D \quad \text{gesetzt, die Gleichung}$$

$$2D(l_1 + l_2) + Dl_2 = 60E \left\{ \frac{d}{l_1} + 0 \right\}$$

$$d = \frac{D \{ l_1 + 3l_2 \} l_1}{60E}$$

Der zu erzielende Werth von D ergibt sich aus der Bedingung, daß

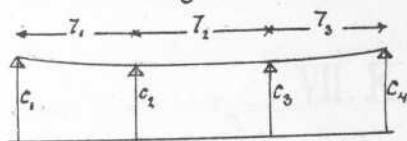
$$\max M_2 - D = \max M_3 - D = \max M_x + D \text{ (absol. Werte)}$$

wo M_x das größte bei gleichen Stützhöhen auftritt. Zwischenmoment

$M_2 = M_3$ " " " " " " " " Auflagermoment

bedeuten.
$$D = \frac{\max M_2 - \max M_x}{2}$$

Fig. 72.



Nach S. 17 berechnet sich

nun $\max M_2 = 1064 \text{ m}^2.$

$\max M_x = 828 \text{ m}^2.$

sonach muß $D = 119,5 \text{ m}^2.$

werden und ergibt sich hieraus für

Trägerhöhe = 5 m; $\sigma = 700 \text{ kg p. cm.}$; $E = 2000000 \text{ kg p. cm.}$

$d = 34,5 \text{ mm}$ als günstigste Senkung.

Der Erfolg dieser Senkung beider Mittelstützen ist,

daß 1.) das absolut größte Moment um 11% verringert wird und

2.) sämtliche Maximalmomente gleich groß werden

$$\max M_2 = \max M_3 = \max M_x = 947,5 \text{ m}^2.$$

1847-1848 - 1849

1849-1850 - 1851

1851-1852 - 1853

1853-1854 - 1855

1855-1856 - 1857

1857-1858 - 1859

1859-1860 - 1861

1861-1862 - 1863

1863-1864 - 1865

1865-1866 - 1867

1867-1868 - 1869

1869-1870 - 1871

1871-1872 - 1873

1873-1874 - 1875

1875-1876 - 1877

1877-1878 - 1879

1879-1880 - 1881

1881-1882 - 1883

1883-1884 - 1885

1885-1886 - 1887

1887-1888 - 1889

1889-1890 - 1891

1891-1892 - 1893

1893-1894 - 1895

1895-1896 - 1897

1897-1898 - 1899

1899-1900 - 1901

1901-1902 - 1903

1903-1904 - 1905

1905-1906 - 1907

TECHN. MECHANIK.

VII. Kapitel.

Berechnung
des elastischen
BOGENTRÄGERS.

Herausgegeben
vom Ingenieur-Verein.
Polytechnikum Stuttgart.

1876.

TECHN. MECHANIK

W. Rappold



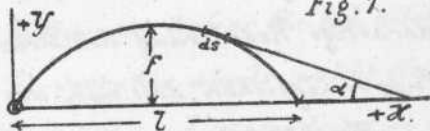
BOGENTRÄGER

Berechnung des elastischen Bogenträgers.

Bezeichnungen.

- l Spannweite d. Bogens
 f Pfeilhöhe
 x, y Coordinaten eines Punkts der Bogenachse
 ds Länge eines Bogenelements
 α dessen Winkel mit der Horizontalen.
 E Elasticitätsmodul
 F Querschnittsfläche im Scheitel
 nF " " " in einem beliebigen Punkt.
 $I^2 F = \Theta$ Trägheitsmoment von nF in Bez. auf d. horiz. Schwerzins.
 p Eigengewicht } p. Längeneinheit d. Horiz. proj.
 k mobile Last }
 P Einzellast
 H Horizontalcomponente d. Auflagerdrucks (Hor. Schub oder = Druck)
 Q Vertical " " " "
 v } ideale Verlängerung der Bogenschnur durch d. Last } $\frac{P}{EF}$
 v_0 }
 u } ideale Verkürzung " " durch d. Horiz. Druck } $\frac{H}{P}$
 u_0 } $\frac{P}{EF}$

Fig. 1.



I.

Analytische Entwicklung.

A.

Allgemeines.

§. 1.

Einleitung.

Im Folgenden verstehen wir unter „elastischen Bogenträgern“ solche Träger, welche kein Scheitelcharnier, wohl aber Kämpfercharniere besitzen oder welche doch mit Vorrichtungen an den Kämpfern versehen sind, die eine derartige Regulirung der Druckvertheilung in der Kämpferfuge ermöglichen, als man die Resultirende der elementaren Kämpferdrücke in der Bogenachse angreifend annehmen kann.

Die Kämpferpunkte werden in einer Horizontalen und der Bogen gegen den Scheitel symmetrisch angenommen; der Querschnitt des Bogens ist veränderlich.

Es lassen sich hier die Auflagerreactionen nicht mehr nach den Fundamentalsätzen der Statik finden, sondern nur mit Hilfe der Biegungstheorie ermitteln.

Die Verticalcomponenten des Auflagerdrucks einer Belastung lassen sich zwar wie beim frei aufliegenden Träger nach dem Hebelgesetz bestimmen, nicht aber die Horizontalcomponenten.

Sind auch diese bestimmt, so läßt sich die Inanspruchnahme der Trägertheile wie früher ermitteln.

§. 2.

Gang der Berechnung.

Da die Wirkungen von Einzellasten sich algebraisch summiren, so wird das Eigengewicht als aus Einzel-
lasten bestehend angenommen und zuerst die Wirkung
einer Einzellast an gewichtlosen Träger ermittelt.

Man nimmt hierbei zunächst an, der Träger liege frei
auf; alsdann wird eine Einzellast und ihre verticalen Auf-
lagerdrücke eine Verlängerung der Bogensehne hervorrufen;
beim Träger mit festen Enden wirkt aber der Horizontaldruck
dieser Verlängerung derart entgegen, daß eine Längenän-
derung nicht stattfindet; man kann daher die Größe des
Horizontal drucks daraus bestimmen, daß er für sich allein
wirkend eine Verkürzung hervorrufen würde, welche gleich
ist jener von der Einzellast und ihren Auflagerdrücken er-
zeugten idealen Verlängerung.

Die Verlängerung v ist, wie Gleichn. (6) und (7.) zei-
gen werden, proportional der Einzellast P und sonst nur
von den Dimensionen des Bogens und der Lage der Last,
d. h. ihrer Entfernung a von einem Auflager abhängig;
ebenso ist (Gl. 8. und 9.) die Verkürzung u proportio-
nal dem Horizontaldruck H ; bestimmt man also die
durch eine Einzellast P und ihre verticalen Auflagerdrü-
cke erzeugte Verlängerung v und dann die durch einen
Horizontaldruck $H' = P$ erzeugte Verkürzung u' , so er-
hält man den zu der Einzellast P gehörigen Horizontal-
druck H aus der Beziehung

$$H : H' = u : u' \quad (\text{wo } u \text{ die von } H \text{ er-}$$

zeugte Verkürzung),

$$H = \frac{H' \cdot u}{u'}, \text{ aber } u = v \text{ und } H' = P, \text{ also}$$

$$(1.) \quad H = \frac{P \cdot v}{u'}$$

Damit sind die Wirkungen einer Einzellast bestimmbar; es ist sodann zu bestimmen

- 2.) die Wirkung einer kontinuierlichen Belastung
- 3.) die ungünstigste Lage der mob. Last für jed. Querschn.
- 4.) die Maximalinanspruchnahme für jeden Querschnitt und endlich
- 5.) die Einwirkung der Temperatur.

B.

Horizontaldruck, erzeugt durch eine Einzellast.

§.3. Bestimmung der Sehnenvorlängerung v .

Der Träger wird an einem Ende ohne Reibung frei aufliegend angenommen, alsdann ist irgend ein Bogenstück AD im Gleichgewicht unter der Einwirkung von

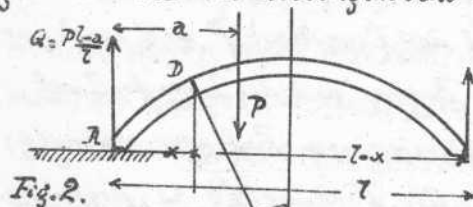


Fig. 2.

Q und zwei Kräften S im Querschnitt und N normal zu demselben:

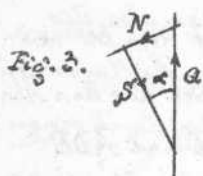


Fig. 3.

$$Q = P \frac{l-a}{l}; \quad N = Q \sin \alpha$$

$$S = Q \cos \alpha \quad \text{Auf jeden}$$

Querschnitt zwischen

$$\alpha = 0 \text{ und } \alpha = \alpha$$

$$\alpha = \alpha \text{ und } \alpha = l$$

wirkt nun 1.) ein Biegemoment

$$M = P \frac{l-a}{l} \alpha$$

$$M = P \frac{a}{l} (l-\alpha)$$

2.) eine Normalkraft

$$N = P \frac{l-a}{l} \sin \alpha$$

$$N = P \frac{a}{l} \sin \alpha$$

3.) eine Schubkraft.

$$S = P \frac{l-a}{l} \cos \alpha$$

$$S = P \frac{a}{l} \cos \alpha$$

NB. N wirkt außerhalb der Bogenachse, kann aber durch Hinzufügung eines Kräftepaars vom Moment M in dieselbe verlegt werden.

Die Biegemomente erzeugen eine Verlängerung v_1 , die in die Achse verlegte Normalkraft eine Verkürzung v_2 , die Schubkräfte eine Verlängerung v_3 der Sehne; letztere kann wegen der Kleinheit von S gegen v_1 und v_2 vernachlässigt werden, so daß

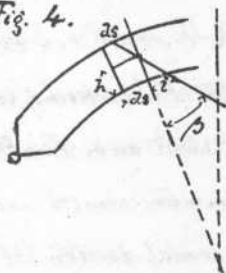
$$v = v_1 - v_2$$

Bestimmung von v_1 .

Durch das Biegemoment M erfährt ein Bogenelement ds eine Veränderung, wie in Kap. VI. §. 2, welche sich

unter Bezugnahme auf Fig. 4 ergibt:

Fig. 4.



$$i = \frac{S ds}{E}, \text{ aber } S = \frac{M h}{\Theta}, \text{ somit}$$

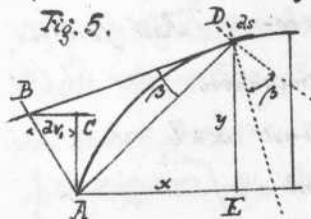
$$(2.) \quad i = \frac{M h ds}{E \Theta}$$

da der Drehungswinkel β des Querschnitts sehr klein ist, so ist

$$(3.) \quad \beta = \tan \beta = \frac{i}{h} = \frac{M ds}{E \Theta}$$

In Folge der Drehung des Querschnitts rückt der Kampferpunkt A nach B (Fig. 5.) und die Vergrößerung $dv_1 = BC$ der

Fig. 5.



Bogensehne ergibt sich aus der Ähnlichkeit der $\triangle ABC$ und $\triangle ADE$

$$\frac{BC}{BA} = \frac{DE}{DA} \text{ oder } \frac{dv_1}{DA/s} = \frac{y}{DA}$$

$$(4.) \quad dv_1 = y/\beta = y \cdot \frac{M ds}{E \Theta}$$

Die ganze Verlängerung v_1 ergibt sich durch Integration der Gl. (4.) unter Einsetzung der entsprechenden Wer-

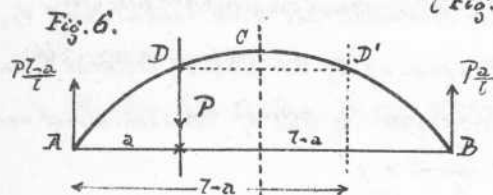
the von M und O zwischen den Grenzen $x=0$ und $x=a$,
 $x=a$ und $x=l$, nemlich

$$(5.) \quad v_1 = \frac{P}{E \cdot F} \left\{ \frac{l-a}{l} \int_{x=0}^{x=a} \frac{xy \, ds}{x^2} + \frac{a}{l} \int_{x=a}^{x=l} \frac{(l-x)y \, ds}{x^2} \right\}$$

Bestimmung von v_2 .

Man erkennt sofort aus Diagrammen wie Fig. 3, daß die Normalkräfte die Querschnitte der Strecke AD und BC

Fig. 6.



(Fig. 6.) auf Druck, die der Strecke CD auf Zug in Anspruch nehmen; ist D' symmetrisch zu D , so ist die Zusammendrückung

von CD' gleich der Ausdehnung von CD , es kommt somit bei Bestimmung von v_2 nur die Zusammendrückung von AD und $D'B$ in Betracht.

Ein Bogenelement zwischen A und D von der Länge ds , dem Neigungswinkel α gegen die Horizontale und dem Querschnitt nF erfährt durch den Normaldruck eine Verkürzung (Kap. I. §. 4.) =

$$\frac{ds N}{E \cdot n F} = \frac{ds P \sin \alpha (l-a)}{E \cdot l \cdot n F}$$

somit ist

die Verkürzung der Horizontalprojectiön

$$(6.) \quad dv_2 = \frac{ds P (l-a) \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{E \cdot l \cdot n F}$$

Die gesammte Verkürzung der Bogensehne in Folge des Normaldrucks ergibt sich nun durch Integration der Gl. (6) zwischen den Grenzen $x=0$ und $x=a$, $x=l-a$ und $x=l$:

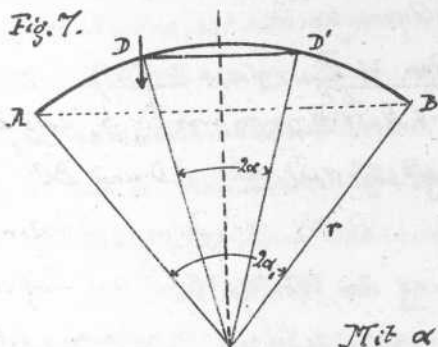
$$(7.) \quad v_2 = \frac{P}{E F} \left\{ \frac{l-a}{l} \int_{x=0}^{x=a} \frac{\cos \alpha \sin \alpha \, ds}{n} + \frac{a}{l} \int_{x=l-a}^{x=l} \frac{\cos \alpha \sin \alpha \, ds}{n} \right\}$$

Anmerkung. In der Praxis kann man v_2 gegen v_1 in

den meisten Fällen vernachlässigen, so daß $v = v_1$,

Hat der Bogen einen constanten Querschnitt und Kreisform mit dem Radius r und dem Centralwinkel 2α , (Fig. 7.)

Fig. 7.



so wird

$$v_1 = \frac{P}{EF} \int_0^\alpha r d\alpha \cos \alpha \sin \alpha$$

$$= \frac{r}{4} \cdot \frac{P}{EF} (\cos 2\alpha - \cos 2\alpha_1)$$

ein leicht berechenbarer Aus-
druck, welcher Aufschluß
über die Größe von v_1 gibt.

Mit $\alpha = 0$ erhält man

$$v_{1\max} = \frac{P}{EF} \cdot \frac{r}{4} (1 - \cos 2\alpha_1)$$

§. 4.

Bestimmung der Verkürzung u'

erzeugt durch einen Horizontaldruck $H' = P$.

Ist der Träger wieder, wie in §. 3. aufliegend
angenommen und wirkt nur H' auf denselben ein, so hat
man analog dem in §. 3. Entwickelten für jeden Querschnitt

1.) ein Biegemoment $M = H' \cdot y = P \cdot y$

2.) eine Normalkraft $N = P \cdot \cos \alpha$

3.) eine Schubkraft $S = P \cdot \sin \alpha$

Die Biegemomente erzeugen nun wieder eine Verkürzung
 u'_1 , die Normalkräfte eine Verkürzung u'_2 und die Schub-
kräfte eine Verlängerung u'_3 , welche wieder vernachlässigt wer-
den kann, so daß $u' = u'_1 + u'_2$. Die Verkürzung u' bestimmt
sich ganz wie v in §. 3. und wird erhalten

$$(8.) u' = \frac{P}{EF} \int_0^\alpha \frac{y^2}{r^2} ds$$

ganz analog §. 3. ergibt sich auch

$$(9.) \quad u_1' = \frac{P}{E \cdot F} \int_{\alpha=0}^{\alpha=l} \frac{\cos^2 \alpha}{n} ds$$

Anmerkung.

Für den Kreisbogen

(Fig. 7.) mit dem Radius r und dem Centriwinkel 2α , erhält man wieder bei constantem Querschnitt

$$u_1' = \frac{P}{EF} \int_{-\alpha}^{+\alpha} r \cos^2 \alpha d\alpha = \frac{P}{EF} \cdot r \left(\alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2} \right)$$

Bei sehr flachen Bögen und hohen Querschnitten darf u_2' gegen u_1' nicht vernachlässigt werden — .

Durch Einsetzung der Werthe

$$v = v_1 - v_2 \quad \text{und} \quad u' = u_1' + u_2' \quad \text{in Gl. (1.)}$$

ergibt sich das der Belastung P entsprechende H .

C.

Horizontaldruck bei gleichm. vertheilter Belastung.

§. 5

Untersuchung des Ausdrucks für H .

$H = \frac{v}{u'} P$ gibt durch Einsetzen der oben berechneten Werthe

$$(10.) \quad H = P \frac{\frac{P}{EF} \left\{ \frac{l-a}{l} \left(\int_{\alpha=0}^{\alpha=a} \frac{xy ds}{z^2} - \int_{\alpha=0}^{\alpha=a} \frac{\cos \alpha \sin \alpha ds}{n} \right) + \frac{a}{l} \left(\int_{\alpha=a}^{\alpha=l} \frac{(l-x) y ds}{z^2} - \int_{\alpha=a}^{\alpha=l} \frac{\cos \alpha \sin \alpha ds}{n} \right) \right\}}{\frac{P}{EF} \left\{ \int_{\alpha=0}^{\alpha=l} \frac{y^2 ds}{z^2} + \int_{\alpha=0}^{\alpha=l} \frac{\cos \alpha \sin \alpha ds}{n} \right\}}$$

Man erkennt sofort, daß das Verhältniß $\frac{v}{u'}$ von P unabhängig ist; die Ausdrücke $\frac{P}{EF}$ im Zähler und Nenner heben sich auf. Der im Zähler in der $\{ \dots \}$ stehende Ausdruck (er sei mit v_0 bezeichnet) ist von der Lage von P abhängig, nicht aber von dessen Größe und bestimmt sich im Übrigen aus den Abmessungen des Bogens.

Der im Nenner in der $\{ \dots \}$ stehende Ausdruck (er sei mit u_0 bezeichnet) ist von der Größe und Lage von P ganz unabhängig; er bestimmt sich lediglich nach den Abmessungen des Bogens, ist also für jeden Bogen eine constante Größe. Die Werthe v_0 und u_0 ergeben sich unmittelbar, wenn man als Einzellast bezw. Horizontaldruck zur Bestimmung von v und u' eine Kraft $P_0 = H_0' = EF$ wählt.

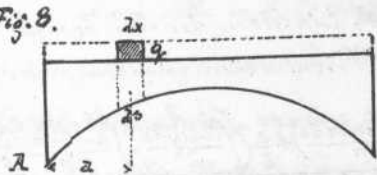
Gleichung (10.) kann man nun also schreiben:

$H = \frac{v_0}{u_0} P$, wo v_0 eine mit der Lage von P variable Größe, u_0 eine für denselben Träger constante Größe bedeutet.

§. 6.

Gleichung des Horizontaldrucks bei gleichmäßig vertheilter Last.

Statt einer Einzellast P , in der Entfernung a vom Auflager A wirkend, nehmen wir auf das Bogenelement ds mit der Horizontalprojection dx in der Abscisse x wirkend eine gleichmäßig vertheilte Last $q \, dx$ an; alsdann ist



$$dH = \frac{v_0}{u_0} q \, dx$$

Für eine gleichmäßig

vertheilte Last von $x=0$ bis $x=a$ ist nun

$$(11.) \quad H = \int_{x=0}^{x=a} \frac{v_0}{u_0} q \, dx = \frac{q}{u_0} \int_{x=0}^{x=a} v_0 \, dx$$

Man kann so.

mit H für jede beliebige Belastung des Trägers ermitteln.

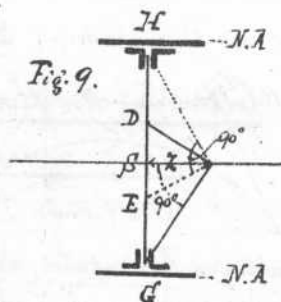
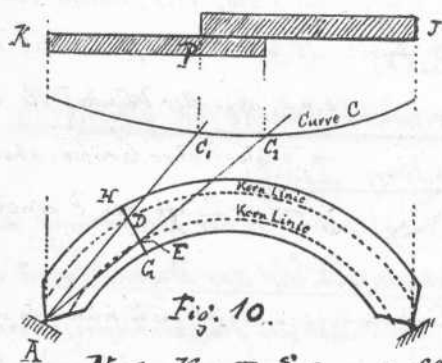
D.

Ungünstigste Lage der mobilen Last.

§. 7.

Wesen und Construction der Kernlinie.

Da die größten Spannungen in den äußersten Fasern der Querschnitte auftreten und beim Bogenträger die Max. Druckspannungen die Max. Zugspannungen überschreiten, so genügt es in der Regel die Max. Druckspannungen der äußersten Fasern bei Ermittlung der ungünstigsten Lage der mobilen Last zu Grunde zu legen.



Nach Kap. I §. 9 und ff. entstehen in einem Querschnitt nur einerlei Spannungen, solange die Außenkraft innerhalb des Kernes angreift; da symmetrische Querschnitte vorausgesetzt werden, so genügt es, die auf der vertikalen Symmetralachse liegenden Kernpunkte zu ermitteln (Fig. 9), was mit Hilfe des Trägheitsradius z und der Bedingung, daß die Neutralachse durch die äußeren Begrenzungslinien geht, nach Kap. I. §. 9. geschieht.

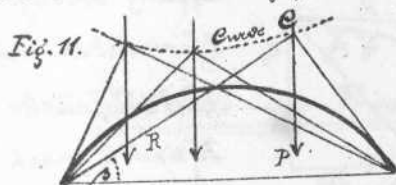
Die geometrischen Orte der Kernpunkte der einzelnen Querschnitte im Längenschnitt heißen Kernlinien (Fig. 10).

Eine Einzellast P erzeugt nach dem Vorigen in den äußersten Fasern $\{H\}$ eine Zug- oder Druckspannung, je nachdem die Drucklinie bei dieser Last $\begin{cases} \text{über od. unter } D \\ \text{unter od. über } E \end{cases}$ liegt.

§. 8.

Ermittlung der ungünstigsten Lage der mobilen Last.

Bestimmt man für eine Reihe verschiedener Lagen der Last P die entsprechenden H und damit die Auflagerreactionen R , so erhält man als geometrischen Ort der Schnittpunkte von P und R eine Curve C (Fig. 11.), welche von der Größe von P unabhängig ist, weil H und R proportional P



sind, also der Winkel β bei veränderlicher Größe, aber gleicher Lage von P constant ist.

Nach dem in §. 7. Entwickelten lässt sich nun die ungünstigste Lage einer gleichmäßig vertheilten mobilen Last leicht bestimmen.

Es erzeugt z.B. für den Querschnitt HG (Fig. 10.) die Belastung der Strecke JP die größte Druckspannung in dem Punkte G , weil die Drucklinien bei allen Belastungen dieser Strecke unter dem entsprechenden Punkte D der Kernlinie liegen, während die Drucklinien der Belastungen KP über demselben liegen.

Durch die Linie AEC_2 erhält man die Belastungsscheide C_2 für die Faser H des Querschnittes GH .

E.

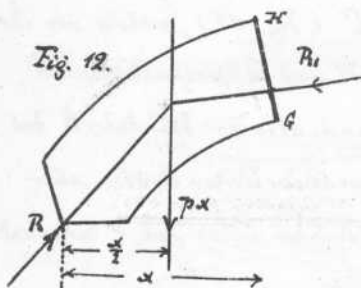
Spannungen eines Querschnitts.

§. 9.

Außenkräfte an einem abgetrennten Trägertheil.

Hat man die ungünstigste Lage der mobilen Last ermittelt, so erhält man die auf den untersuchten Querschnitt wirkende Außenkraft als Gegenresultante aller sonst auf den abgetrennten Trägertheil wirkenden Außenkräfte.

Man wählt zu diesem Zweck am besten den unbelasteten Trägertheil, alsdann setzt man die durch das Eigengewicht, sowie die ungünstigste mobile Be-



lastung erzeugten Horizontal- und Verticaldrücke H und Q nach

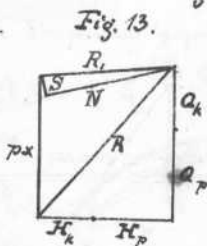


Fig. 13. zu einer Resultante R zusammen und erhält dann die in Normalkraft N und Schubkraft S zerfallende, im Querschnitt thätige Außenkraft R , aus dem Kräfteplan oder durch Rechnung.

Die Schubkräfte können bei der Berechnung des Querschnitts als sehr klein außer Acht gelassen werden und es erübrigt nur noch, die Vertheilung der Normalspannung auf den Querschnitt zu ermitteln.

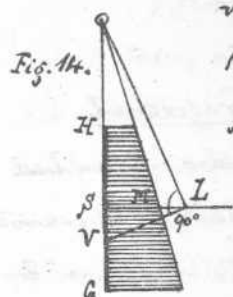
Die Schubkräfte können bei der Berechnung des Querschnitts als sehr klein außer Acht gelassen werden und es erübrigt nur noch, die Vertheilung der Normalspannung auf den Querschnitt zu ermitteln.

§. 10.

Vertheilung der Normalspannungen im Querschn. G.H.

Ist die Lage des Angriffspunkts der im Querschnitt

thätigen Aussenkraft (Punct der Drucklinie) durch Zeichnung oder Rechnung bestimmt, so ergibt sich die Spannungsvertheilung (Fig. 14.) nach Kap. I. §. 9. wie folgt:



Es sei GH die Querschnittshöhe, β der Schwerpunkt des Querschnitts, V der Angriffspunkt der Aussenkraft, so mache

$$\beta M = \frac{N}{n \cdot F} \quad (\text{Spann. p. □ Einheit im Schnittp.})$$

$$\beta L = z \quad (\text{Trägheitsradius in Bez. auf die horizontale Schwerpunktschwerachse}).$$

horizontalen Schwerpunktschwerachse).

$$VLO = 90^\circ, \quad \text{so geben die Ordinaten zwischen HG und OM die Druckvertheilung im Querschnitt.}$$

naten zwischen HG und OM die Druckvertheilung im Querschnitt.

F.

Einfluß der Temperaturänderungen.

§. 11.

Längenänderung und Horizontaldruck, erzeugt durch Temperaturänderungen.

Hat der spannungslose Bogen bei t_1 Grad Celsius die normale Sehnenlänge l = der Entfernung der beiden Auflagerpunkte und ist α der Ausdehnungscoefficient des Bogenmaterials bei 1° , so ist die Verlängerung der Sehne bei t_2

$$= l \cdot \alpha (t_2 - t_1) \quad \text{Um diese Längenänderung aufzuheben, muß offenbar der Horizontaldruck entsprechend vermehrt (oder vermindert) werden; die Größe dieser Vermehrung ist}$$

heben, muß offenbar der Horizontaldruck entsprechend vermehrt (oder vermindert) werden; die Größe dieser Vermehrung ist

$$= \frac{EF \cdot l \cdot \alpha (t_2 - t_1)}{u_0}$$

II.

Durchführung der Berechnung auf
graphischem Wege
(nach Mohr) .

A.

Allgemeines .

§. 12.

Die Trägerdimensionen.

Als Trägerform empfiehlt sich aus denselben Gründen wie beim Bogentfachwerk mit drei Charnieren der Bogen, dessen Achse eine einfache Parabel bildet.

Die Querschnittsdimensionen werden auf Grund der in Kap. II. §. 5. gegebenen Werthe für Belastung und Eigengewicht oder nach ausgeführten Beispielen gewählt; im 1. Fall erhält man einen angenäherten Werth durch Zugrundelegung einer über den Träger gleichmäßig vertheilten Gesamtbelastung.

Ist nemlich die Totallast $t = p + k$ pro Längeneinheit, so ergibt sich unter obiger Annahme der Scheitel drücke (in diesem Fall = dem Horizontaldruck) nach Kap. II, §. 42

$$H = \frac{t \cdot l^2}{8f}$$

Die Änderung des Querschnitts gegen das Auflager bestimme man zunächst wieder nach ausgeführten Beispielen. — Eine erste durchgeführte Berechnung wird schon sehr angenäherte Werthe für die richtigen Dimensionen ergeben.

§. 13.

Gang der Arbeit.

1.) Es werden unter Zugrundelegung einer Einzellast bezw. eines Horizontaldrucks $P_0 = H_0' = EF$ die Werthe $v_0 = v_1 - v_2$ und $u_0 = u_1 - u_2$ construirt, sodann

2.) Curven aufgezeichnet, deren Abscissen mit den Abscissen der Trägerfigur übereinstimmen, und deren Ordinaten für jede beliebige Abscisse a bei gleichmäßig verteilter mobiler Belastung, bezw. für jeden einzelnen Querschnitt die entsprechenden Werthe der horizontalen und verticalen Auflagerreactionen der mobilen Last und des Eigengewichts angeben; ferner wird

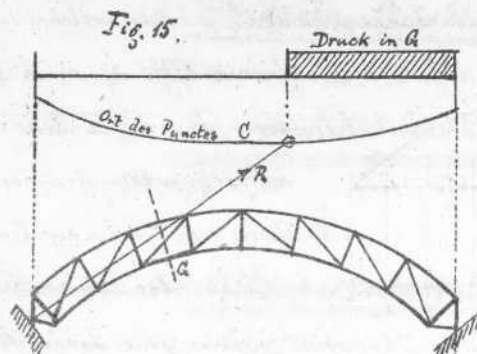
3.) die Curve C (§. 8.) und damit die Belastungsscheiden bestimmt.

Es erübrigt dann noch die in §. 9 und in §. 10. angegebenen Operationen zur Bestimmung der in einem Querschnitt wirkenden Auflsenkraft und deren Spannungsvertheilung auszuführen. Die Detailberechnung einzelner Constructionstheile gegen Zerknickung etc. wird ganz wie bei einfachen Fachwerkträgern vorgenommen und daher hier nicht weiter ausgeführt.

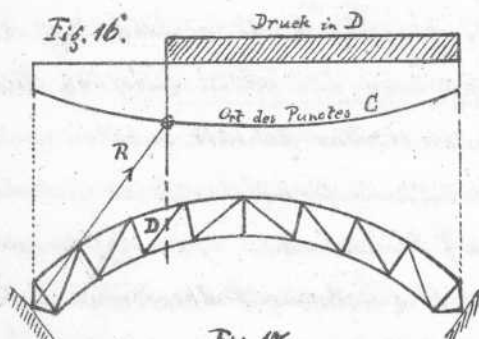
NB. Auf die zweckmäßige Wahl der Maßstäbe ist ein besonderes Augenmerk zu richten, wodurch sich wesentliche Vereinfachungen erzielen lassen. —

Noch ist zu bemerken, daß bei einem aus einzelnen Stäben zusammengesetzten Bogen (Fig. 15.) an Stelle der Punkte D und E der Kernlinie die oberen

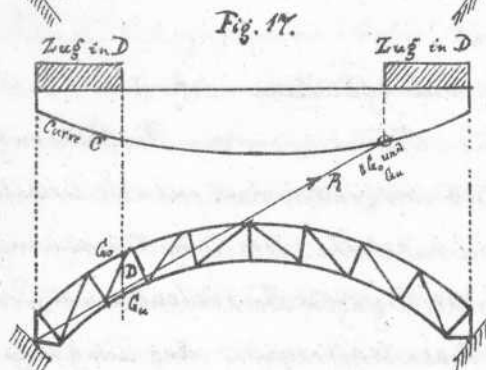
und unteren Knotenpunkte als Momentenpunkte zur Bestimmung der Belastungs-



scheiden für die Gurtungen treten, während für die Diagonalen und Verticalen der Querschnitt selbst die Belastungsscheide bildet (Fig. 16.).



Eine zweite Belastungsscheide entsteht für die Füllungstheile, wenn die Auflagerreaction durch den Schnittpunkt der geschnittenen Gurtungstheile geht, bezw. ihnen parallel ist, da hier das Moment der Aus-



senkräfte das Zeichen wechselt (Fig. 17.).

(Siehe für diesen Fall auch die Regeln in Kap. II. §. 4.)

B.

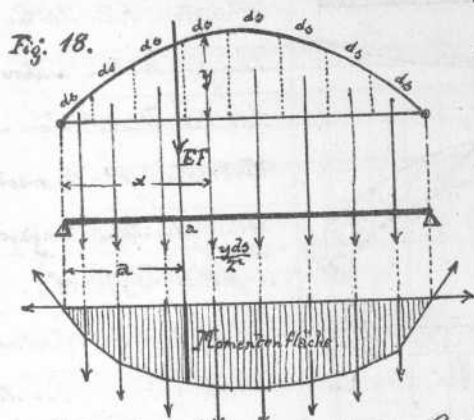
Construction der Werthe v_0 und u_0 (Gl. 10.)

§. 14.

Construction von $v_0 = v_1 - v_2$

1.) Darstellung von v_0 .

Der Ausdruck $V_0 = \frac{l-a}{l} \int_{x=0}^{x=a} \frac{xy ds}{z^2} + \frac{a}{l} \int_{x=a}^{x=l} \frac{(l-x)y ds}{z^2}$
(siehe Gl. 5.) stellt das Biegemoment $^{x=a}$ dar, welches in dem



Querschnitt a eines gewicht-
losen, an zwei Enden frei
aufliegenden geraden Bal-
kens von der Länge l wirkt,
der auf der Horizontalpro-
jection jeder Länge ds
mit der Last $\frac{y ds}{z^2}$ belas-
tet ist (Fig. 18.), denn

zieht $\frac{y ds}{z^2}$ { links } von jenem Querschnitt, so ist

$$\left\{ \begin{array}{l} M_0 = \frac{y ds}{z^2} \cdot \frac{x}{l} (l-a) \\ M_0 = \frac{y ds}{z^2} \cdot \frac{l-x}{l} \cdot a \end{array} \right. , \text{ somit das Biege-}$$

moment aller Belastungen der ganzen Balkenlänge im Quer-
schnitt mit der Abscisse a

$$= \frac{l-a}{l} \int_{x=0}^{x=a} \frac{xy ds}{z^2} + \frac{a}{l} \int_{x=a}^{x=l} \frac{(l-x)y ds}{z^2} = V_0$$

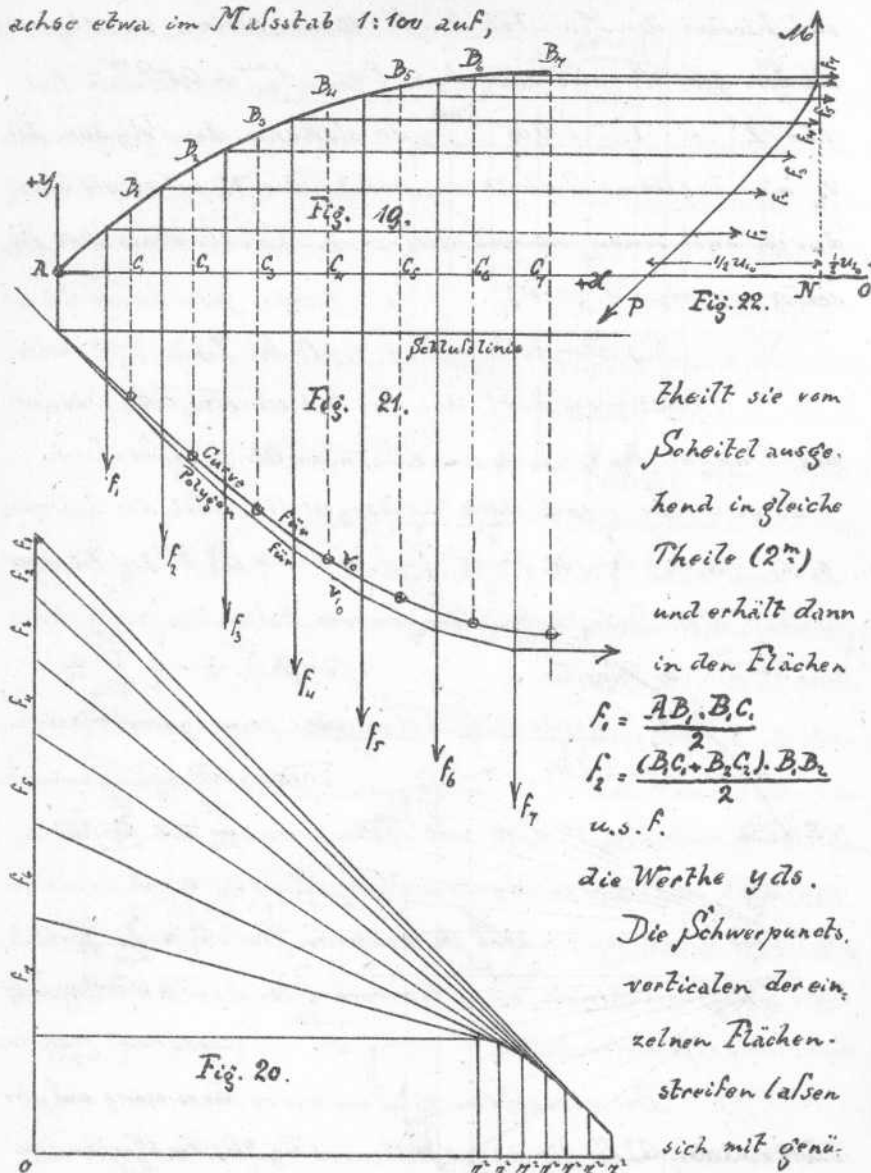
Dieses Biegemoment

läßt sich nach Cap. V. §. 10 mit Hilfe einer aus den Belastun-
gen $\frac{y ds}{z^2}$ und dem constanten Horizontalzug 1 construirten
Seilcurve gewinnen, indem die zwischen Seilcurve und Schluß-
linie gelegene Ordinate eines Querschnitts das Biegemom-
ent desselben darstellt.

Bei variablem z^2 (wie wir es annehmen) emp-
fiehlt es sich, an Stelle dieser Seilcurve ein Seilpolygon mit
dem von Strecke zu Strecke der Bogenachse (etwa 2^m) wech-
selnden Horizontalzug z^2 und den Belastungen $y ds$ (wo
 ds ebenfalls $= 2^m$) zu construiren, indem es bei großen
Bögen immer noch eine genügende Genauigkeit gewährt,

wenn Z^2 auf je 2^m constant angenommen wird.

Man trägt zu diesem Zweck (Fig. 19.) die halbe Bogen, achse etwa im Maßstab 1:100 auf,



theilt sie vom Scheitel ausgehend in gleiche Theile (2^m) und erhält dann in den Flächen

$$f_1 = \frac{AB_1 \cdot B_1 C_1}{2}$$

$$f_2 = \frac{(B_1 C_1 + B_2 C_2) \cdot B_1 B_2}{2}$$

u. s. f.

die Werthe y ds.

Die Schwerpunkte, verticalen der einzelnen Flächenstreifen lassen

sich mit genü-

gender Genauigkeit nach dem Augenmaß einzeichnen oder können die Schwerpunkte durch Construction gefunden werden.

Man construirt nun aus den f und den zugehörigen Z^2 einen Kräfteplan (oder reißt vielmehr die einzelnen

Kräftedreiecke wie aus der Fig. 20. ersichtlich aneinander) und hiermit das Seilpolygon der V_0 (Fig. 21). Es empfiehlt sich hierbei den Maßstab der F 10 mal kleiner zu nehmen als den der Z^1 , also z.B. für F : $1\text{ mm} = 0,5^\circ\text{m}$; für Z^1 : $1\text{ mm} = 0,05^\circ\text{m}$, da alsdann das Polygon der V_0 eine bequeme Gestalt annimmt; die V_0 erhalten dadurch auch einen 10 mal kleineren Maßstab als ihre Abzissen (also 1:1000).

2.) Darstellung von V_0 (s. Gl. 7.)

Wählt man statt der Bogenelemente ds wieder die Längen A_1B_1 ; B_1B_2 ; u.s.f., so werden die Größen $ds \sin \alpha \cos \alpha$ der Gleichg (7) dargestellt durch die Längen c_1, c_2 , u.s.w. der Fig. 23

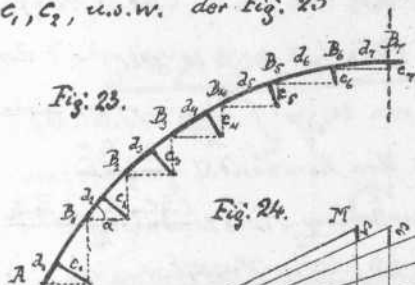


Fig. 23.

und die Gl. (7.) geht über

$$V_0 = \frac{L-a}{L} \sum_{x=0}^{x=a} \frac{c}{n} + \frac{a}{L} \sum_{x=a}^{x=L} \frac{c}{n}$$

aber beim symmetrischen

Träger ist

$$\sum_{x=0}^{x=a} \frac{c}{n} = \sum_{x=L-a}^{x=L} \frac{c}{n},$$

so mit

$$V_0 = \sum_{x=0}^{x=a} \frac{c}{n}$$

Die Werte $\sum \frac{c}{n}$

construirt man, in

dem man auf der

(Fig. 24.) die Werte von

auf der Ordinate des

Horizontalen GL

n aufträgt und

Punctes I mit der Abscisse $GL = 1$ die Werte $\frac{c_1}{n_1}$; $\frac{c_2}{n_2}$

dadurch aneinanderreicht, daß man c_1, c_2, \dots wie in der Fig.

aufträgt.

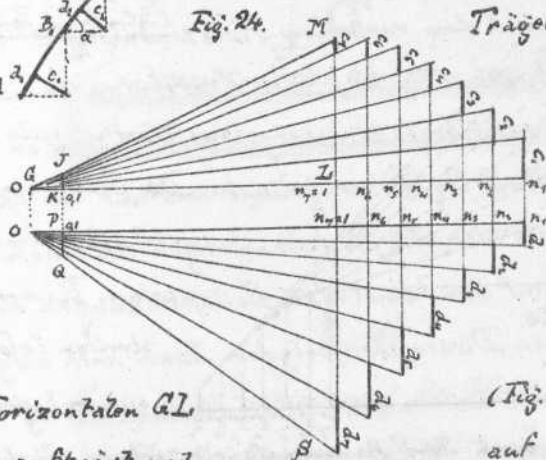


Fig. 24.

Es verhält sich also die gleichmäßige Belastung bis zu einer gewissen Abscisse zu dem dadurch erzeugten Horizontalschub wie jene Abscisse zur zugehörigen Ordinate der Curve BD :

$$k \cdot a : H = a : b$$

Die Curve BD braucht nur für die eine Bogenhälfte construiert zu werden, denn da der Bogen symmetrisch ist, so ist, wenn die Ordinaten der Curve BD

für $x = a$; $x = \frac{l}{2}$; $x = l - a$
mit b , b_1 , b_2 bezeichnet
werden,

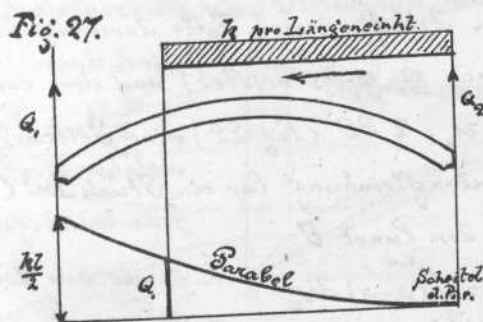
$$b_2 - b_1 = b_1 - b$$

$$b_2 = 2b_1 - b \quad , \quad \text{weil symmetrische Belastungen rechts und links vom Scheitel dieselbe Vermehrung des Horizontalschubs hervorbringen.}$$

§. 17.

Curve für die Verticalcomponente d. Auflagerdrucks
bei gleichmäßig vertheilter, von rechts nach links fortschreitender mobiler Last.

Da die Verticalcomponenten Q der von einer beliebigen Belastung erzeugten Auflagerreactionen sich ganz wie beim einfachen Träger bestimmen, so



erzeugten Auflagerreactionen sich ganz wie beim einfachen Träger bestimmen, so ergibt sich nach Stk 201 eine Parabel

mit dem Scheitel im rechten Auflager und der Ordinate $= \frac{kl}{2}$

im linken Auflager als graphische Darstellung der Beziehung zwischen der Abscisse der fortschreitenden Last und der entsprechenden Verticalcomponente Q_1 des linksseitigen Auflagerdrucks.

D.

Geometrischer Ort des Schnittpunctes C

einer über den Träger geführten Einzellast P und ihrer Auflagerreactionen.

(vergl. S. 7.)

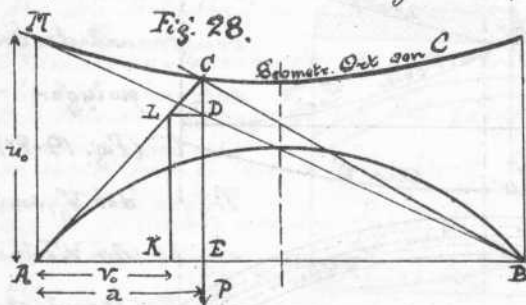
§. 18.

Construction der Curve C.

Ist der Träger in der Entfernung a vom Auflager durch eine Einzellast P belastet, so ist die Verticalcomponente des linken Auflagerdrucks

$$Q_1 = P \frac{l-a}{l}, \quad \text{der von Perzeugte} \\ \text{Horizontalschub} \quad H = \frac{P \cdot v_0}{u_0} \quad (\text{Gl. 10.})$$

Wählt man nun den Maßstab der Kräfte so, daß P durch die Länge $AM = u_0$ dargestellt ist, und zieht BM , so ist Q_1 durch ED dargestellt, der Horizontalschub



wird dann
 $= \frac{u_0 v_0}{u_0} = v_0$,
 welcher Werth für
 jede beliebige Abscisse aus der
 Fig. 21. entnommen

werden kann. Macht man also $AK =$ dem der Abscisse a

entsprechenden Werthe von V_0 , zieht $KL \perp AB$ und DL parallel zu AB , so ist AL die Richtung des Auflagerdrucks und C der Punkt in welchem P von den beiden Auflagerreactionen geschnitten wird, also ACB die Drucklinie für die Einzellast P . Durch Wiederholung dieses Verfahrens für verschiedene Werthe von a erhält man den geometrischen Ort von C . Die Belastungsscheiden werden sodann für die einzelnen Querschnitte nach dem in §. 8 und 13. angegebenen Verfahren ermittelt.

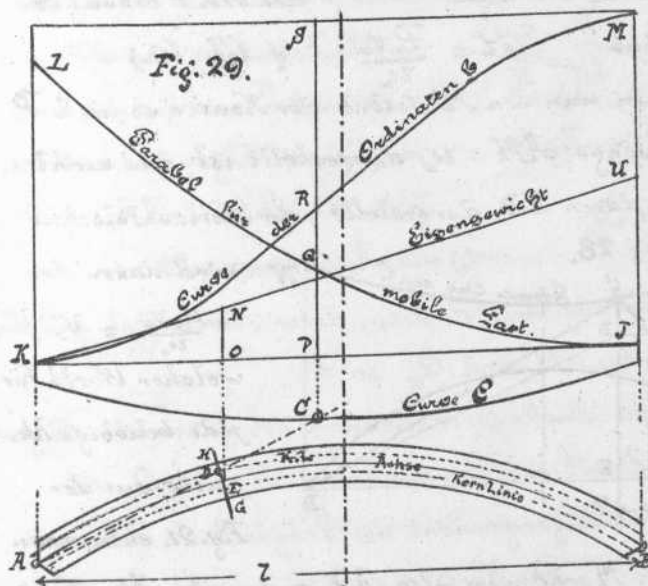
E.

Zusammenfassung der Operationen.

§. 19.

Vorbereitende Constructionen.

Man construirt zu zwei besonders im Maßstab 1:100



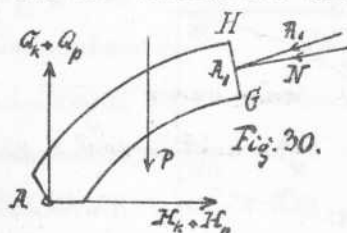
aufgetragenen halben Bogenachsen zuerst den Kräfteplan und das Seilpolygon (Fig. 19-21) der V_0 , sowie die Werthe c und d , $\sum \frac{c}{n}$ und $\sum \frac{d}{n}$

(Fig. 23-24.) ; dann das Seilpolygon für u_0 (Fig. 22.) und das für b (Fig. 25.). Sodann zeichne man über der eigentlichen Trägerfigur (etwa Maßstab 1:200), in welche die Kernlinien eingetragen sind, die Curve KM mit den entsprechend reducirten Ordinaten b (nach Fig. 25.); hierauf construirt man die Parabel JL der fortschreitenden mobilen Last, wobei man $k=1$ annimmt, wodurch die Ordinate am Auflager $= \frac{l}{2}$ wird, und schließlich construirt man den Ort des Punktes C und bestimme damit die Belastungsscheide.

§. 20.

Bestimmung der in einem Querschnitt wirkenden Kraft.

Für einen Querschnitt HG (Fig. 29.) ergibt sich nun z.B. die stärkste Druckspannung der Faser G durch die mit Hilfe der Geraden AD u. der Curve C ermittelte einseitige



mobile Belastung von JP .

Es wirken nun auf den links vom Schnitt liegenden unbelasteten Trägetheil AA_1 ,

1.) die Auflagerreactionen der mobilen Belastung von JP bzw. deren Horizontal- und Verticalcomponenten H_k und Q_k in A .

2.) die Auflagerreactionen des gesamten Eigengewichts in A mit den Componenten H_p und Q_p

3.) das Eigengewicht des Trägetheils AA_1 .

Die Verticalcomponente Q_k für die mo-

bile Belastung von JP ergibt sich aus der Ordinate PQ der Parabel JL für die Abscisse AP ; $Q_k = k \cdot PQ$

Die Horizontalcomponente H_k der mobilen Belastung von JP wird erhalten aus der Ordinate RS der Curve KM (die Ordinate PR ergäbe den Horizontaldruck der mob. Belastung von KP) für die Abscisse AP

$$H_k = k \cdot RS$$

Die Verticalcomponente vom Gesamteigengewicht ergibt sich aus der Ordinate KL der Parabel JL für die Abscisse O

$$Q_p = k \cdot \left(\frac{p}{k} \cdot KL \right)$$

NB. Die Multiplication mit $\frac{p}{k}$ dient dazu, die durch mob. Last und Eigengewicht erzeugten Kräfte vor der gemeinschaftl. Multiplication mit k in demselben Maßstab zusammenzustellen.

Den Horizontalschub vom Gesamteigengewicht bekommt man aus der Ordinate JM der Curve KM

$$H_p = k \left(\frac{p}{k} JM \right)$$

Das Eigengewicht der Trägerstrecke KO (AA_1) ergibt sich aus der Abscisse KO

$$P = k \left(\frac{p}{k} KO \right) \quad \text{oder wenn}$$

$$JU = \frac{p}{k} \cdot KJ \quad \text{gemacht wird}$$

$$P = k \cdot ON$$

Man construirt nun (vergl. Fig. 13.) aus den im Maßstab des Bogens

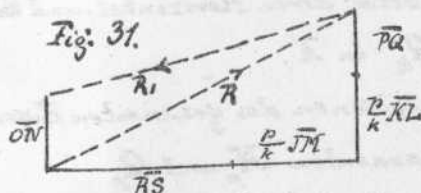


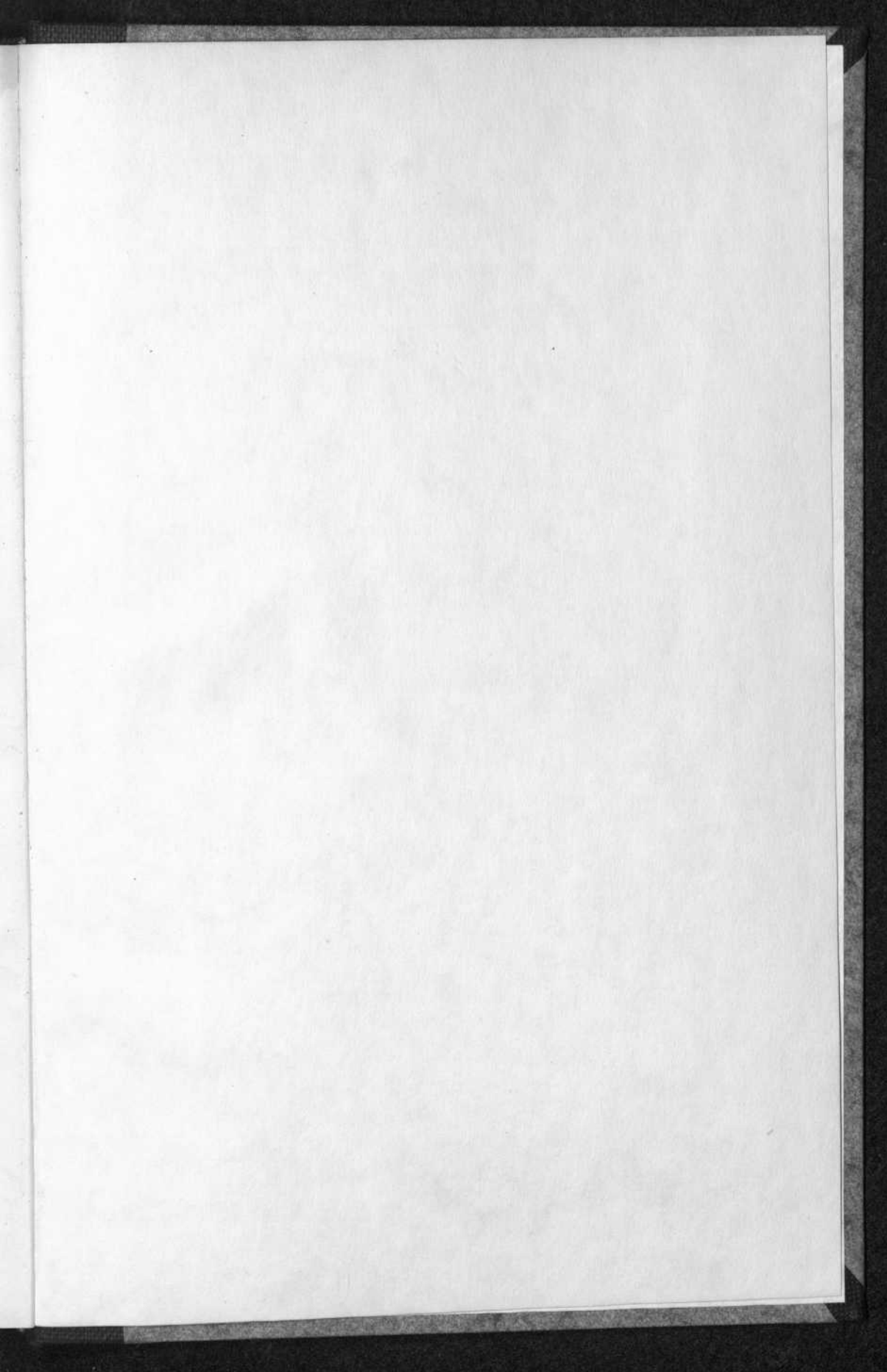
Fig. 29. gemessenen Längen den Kräfteplan

Fig. 31. und erhält mittelst desselben nach §. 9 die im Querschnitt thätigen Auslenkräfte, deren Größe sich durch Multiplication mit

k ergibt.

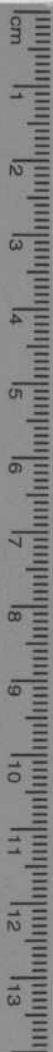
Schliesslich wird noch, wie in §. 10. angegeben ist, die Spannungsvertheilung ermittelt und danach die Querschnittsdimensionen bestimmt.

Ende.



THE
JOURNAL OF
THE
AMERICAN MEDICAL ASSOCIATION
PUBLISHED WEEKLY
CHICAGO, ILL., U.S.A.

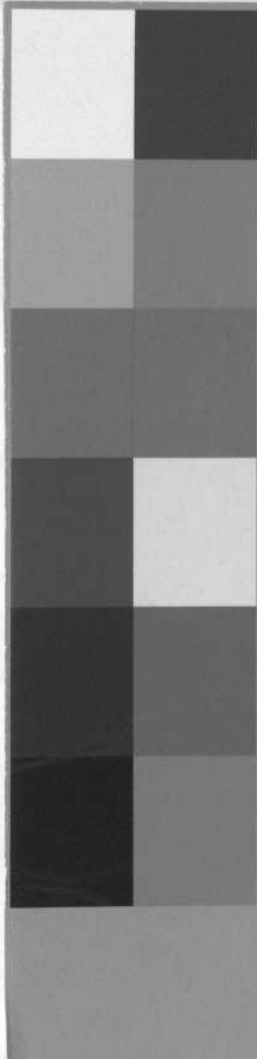
1917



Colour & Grey Control Chart



Blue	Cyan	Green	Yellow	Red	Magenta
White	Grey 1	Grey 2	Grey 3	Grey 4	Black



N12<110722539093



Univ.-Bibl. Stuttgart

nur
LS

